Olimpiada Paceña de Matemática
Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática,
Facultad de Ciencias Puras y Naturales,
Universidad Mayor de San Andrés,
La Paz, Bolivia.

Cuaderno N° 3

Banco de Problemas 2015
Categoría γ

Editado por

Helder Edwin López Romero
Charlie Lozano Correa

La Paz – Bolivia

Presentación

Los cuadernos de la Olimpiada Paceña de Matemática son compendios breves sobre temas específicos. El Cuaderno N° 3 es un grupo de problemas que está dirigido a los estudiantes y profesores interesados en participar en la Categoría γ de la 10^a Olimpiada Paceña de Matemática. Les recordamos que una olimpiada no es una evaluación de conocimientos y los problemas que encontrarán en este Cuaderno son una referencia de las características de los problemas que encontrarán en la Primera Fase de la OPM y no es una descripción de contenidos.

Este cuaderno está divido en cuatro secciones y sugerimos que se trabaje con la siguiente metodología. Cuando encuentre la solución, compare su respuesta con la que se encuentra en la Claves, si no coinciden, puede ver las sugerencias y revisar su solución. Cuando su respuesta coincida con la de las Claves compare su solución con la que se brinda en el tercera sección. Una solución se valora y entiende mejor cuando se ha intentando resolver el problema por algún tiempo.

Para aprender a resolver problemas, se deben resolver problemas. Claro, comenzando con los adecuados al nivel, pero cada vez deben ser más complejos y sus soluciones deberán requerir mayor ingenio y experiencia.

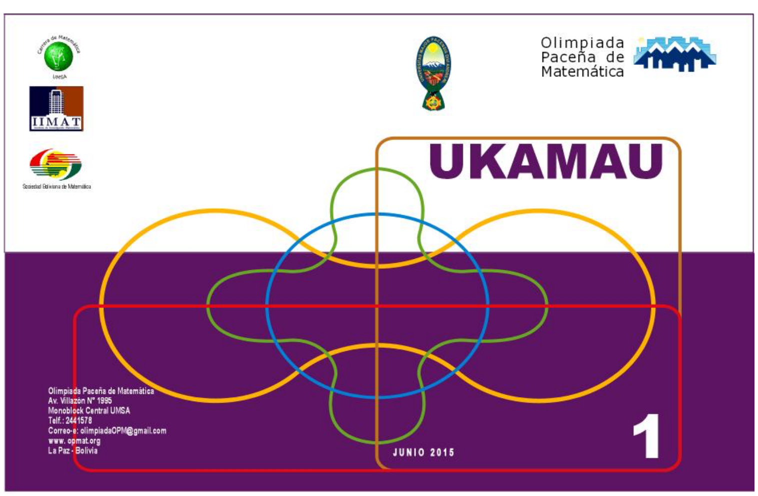
1 de agosto de 2015

Olimpiada Científica Estudiantil Plurinacional Boliviana

Material cedido para su distribución en medios magnéticos por el Instituto de Investigación Matemática-IIMAT, dependiente de la Carrera de Matemática de la Facultad de Ciencias Puras y Naturles-U.M.S.A., al Viceministerio de Ciencia y Tecnología del Ministerio de Educación del Estado Plurinacional de Bolivia.

14 de marzo de 2016

Material de Olimpiadas: Revista UKAMAU



UKAMAU, es la revista de la Olimpiada Paceña de Matemática. La Revista UKAMAU es una publicación regular del Instituto de Investigación Matemática-IIMAT de la Universidad Mayor de San Andrés con la colaboración de la Sociedad Boliviana de Matemática. En el año 2015 se han publicado los dos primeros números de la Revista, el primer número tiene 109 problemas de olimpiadas para secundaria con solución completa, además de 63 problemas propuestos. El número dos tiene 145 problemas para secundaria con solución completa.

Cualquier número de la Revista UKAMAU tiene costo de Bs. 25, están disponibles para su compra en:

1. Biblioteca de la Carrera de Matemática. Edificio Antiguo, Monoblock Central. Av. Villazón No 1995(Horario de oficina).

2. Si está interesado en hacer la comprar desde el interior de Bolivia, escribir para olimpiadaOPM@gmail.com

Índice

1. Enunciados de los problemas **3**

2. Sugerencias y hechos que ayudan **4**

3. Soluciones **5**

4. Clave de respuestas **9**

1. Enunciados de los problemas

1. Sean x_1 y x_2 las raíces reales de la ecuación

$$x^2 - (k-2)x + (k^2 + 3k + 5) = 0.$$

¿Cuál es el valor máximo de $x_1^2 + x_2^2$?

(A) 19 (B) 18 (C) $\frac{50}{9}$ (D) 17 (E) Ninguna

2. El valor de la expresión

$$\frac{(4\times 7+2)(6\times 9+2)(8\times 11+2)\cdots(100\times 103+2)}{(5\times 8+2)(7\times 10+2)(9\times 12+2)\cdots(99\times 102+2)}$$

es:

(A) 510 (B) 511 (C) 610 (D) 611 (E) 110

3. Sea $P(x) = ax^7 + bx^3 + cx - 5$, donde a, b, c son constantes. Si $P(-7) = 7$, hallar el valor de $P(7)$.

(A) -13 (B) -15 (C) -17 (D) -19 (E) -21

4. Dado que en un triángulo rectángulo la longitud de uno de los catetos es 11 y las longitudes de los otros dos lados son enteros positivos. Halle el perímetro del triángulo.

(A) 130 (B) 131 (C) 132 (D) 133 (E) 134

5. ¿Cuántos de los triángulos cuyos vértices se eligen de los vértices de un cubo son equiláteros?

(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 24 (E) 16

6. Simplifica la expresión $(a^6 - b^6) \div (a^3 - b^3) \div (a^2 - ab + b^2)$.

(A) $a - b$ (B) $a + b$ (C) $a^2 - b^2$ (D) $b - a$ (E) $a^3 + b^3$

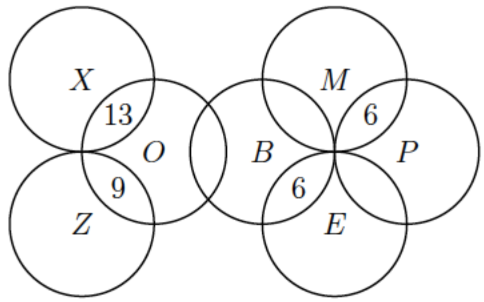
7. En la progresión aritmética $\{a_n\}$, $a_1 > 0$ y $3a_8 = 5a_{13}$. Sea S_n la suma de los n primeros términos. ¿Para qué valor de n es S_n máximo?

(A) 10 (B) 11 (C) 20 (D) 21 (E) 30

8. Sabiendo que $144 \times 177 = 25488$, se puede concluir que $254,88 \div 0,177$ es igual a

(A) 1440 (B) $14,4$ (C) $1,44$ (D) $0,144$ (E) 144

9. Cada uno de los siete discos X, Z, O, B, M, E, P tiene un peso diferente, de 1g a 7g. En las intersecciones de los discos indicamos la suma de los pesos de esos dos discos. ¿Cuál es la suma de los pesos de los cinco discos O, B, M, E, P?



(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

10. Dados $x = \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$, hallar el valor de $x^4 + y^4 + (x+y)^4$.

    (A) 1153 (B) 1152 (C) 1151 (D) 1150 (E) 1149

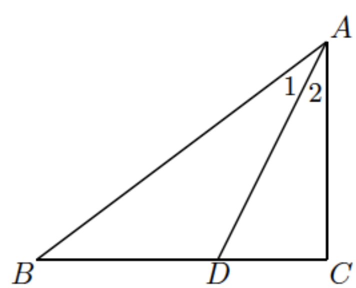
11. La expresión

$$P = \frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$$

    es igual a:

    (A) $\frac{9}{10}$ (B) $\frac{7}{10}$ (C) $\frac{11}{10}$ (D) $\frac{13}{10}$ (E) $\frac{3}{10}$

12. Como se muestra en la figura, $\angle C = 90°$, $\angle 1 = \angle 2$, $CD = 1,5$cm, y $BD = 2,5$cm. Calcula AC.



    (A) $3,5$ cm (B) 4 cm (C) 5 cm (D) 3 cm (E) 2 cm

2. Sugerencias y hechos que ayudan

Si tenemos una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, la fórmula de Viète no dice que las raíces x_1, x_2 de esta ecuación satisfacen $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ y $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$; de esto se deduce que

$$(x_1 + x_2)^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} \tag{1}$$

1. Recuerda en primer lugar que para una ecuación cuadrática cualquiera $ax^2+bx+c=0$, el discriminante se define como $\Delta = b^2-4ac$. Como debe ser Δ para que la ecuación tenga soluciones reales?. Por otro lado, recuerda también que si x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación, $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ y $x_1x_2=\frac{c}{a}$. Ahora analiza $(x_1+x_2)^2$.

2. Observa la forma que tiene cada factor, por ejemplo $4\times 7+2=4\times(4+3)+2$ y $6\times 9+2=6\times(6+3)+2$, entonces cada factor tiene la forma $n(n+3)+2$, analiza esta expresión.

3. Nota que todas las potencias de x en el polinomio son impares, compara ahora $P(7)$ y $P(-7)$

4. Aplica el Teorema de Pitágoras y recuerda que la longitud de los lados del triángulo son enteros positivos.

5. Recuerda que un triángulo es equilátero si sus tres lados tienen la misma longitud y analiza lo que pasa si uno de los lados del triángulo coincide con alguna arista del cubo, podrá ser un triángulo equilátero?

6. Recuerda los productos notables $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ y $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$

7. Observa que $3a_8=5a_{13}$ es equivalente a $a_8=\frac{5}{3}a_{13}$, qué relación ahora puedes establecer entre a_8 y a_{13}?

8. Transforma la fracción en una expresión equivalente entre enteros.

9. Establece a partir de la figura las relaciones que se establecen entre los pesos y analiza las diferentes posibilidades.

10. Calcula $x+y$ y xy y completa cuadrados en el desarrollo de $x^4+y^4+(x+y)^4$.

11. Determina la forma general de cada sumando y racionaliza.

12. Recuerda el Teorema de Pitágoras y las relaciones de semejanza de triángulos.

3. Soluciones

1. ***Respuesta* (B)** Como la ecuación tiene raíces reales, entonces

$$0 \le (k-2)^2-4(k^2+3k+5) = -(3k^2+16k+16) = -(k+4)(3k+4).$$

Resolviendo esta inecuación obtenemos que $-4\le k\le -\frac{4}{3}$. Por la fórmula de Viète (1) obtenemos

$$x_1^2+x_2^2=(k-2)^2-2(k^2+3k+5)=-(k+5)^2+19.$$

El valor permitido para k más próximo a -5 es -4 lo que produce el valor máximo $x_1^2+x_2^2=18$.

2. ***Respuesta* (A)** Notemos que para cualquier entero n se tiene que

$$n(n+3)+2 = n^2+3n+2 = (n+1)(n+2),$$

entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}&\frac{(4\times 7+2)(6\times 9+2)(8\times 11+2)\cdots(100\times 103+2)}{(5\times 8+2)(7\times 10+2)(9\times 12+2)\cdots(99\times 102+2)} =\\ =&\frac{(5\times 6)(7\times 8)(9\times 10)\cdots(101\times 102)}{(6\times 7)(8\times 9)(10\times 11)\cdots(100\times 101)}\\ =&5\times 102\\ =&510\end{aligned}$$

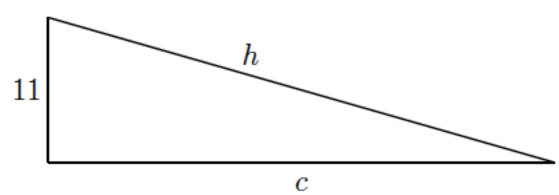
3. ***Respuesta* (C)** Evaluando tenemos que $7 = P(-7) = a(-7)^7 + b(-7)^3 + c(-7) - 5$ de donde tenemos que

$$12 = 7+5 = a(-7)^7 + b(-7)^3 + c(-7) = -\left[a7^7 + b7^3 + c7\right].$$

Por lo tanto,

$$P(7) = a7^7 + b7^3 + c7 - 5 = -12 - 5 = -17.$$

4. ***Respuesta* (C)** Por las condiciones dadas tenemos que



$$\begin{aligned}h^2 &= c^2 + 11^2\\ h^2 - c^2 &= 11^2 = 121\\ (h-c)(h+c) &= 1\cdot 121 = 11\cdot 11\end{aligned}$$

y tenemos dos posibilidades

$$h-c = 1,\quad h+c = 121 \qquad \text{o} \qquad h-c = 11,\quad h+c = 11.$$

La segunda nos da $h = 11$ y $c = 0$ lo que no tiene sentido. Mientras que la primera nos da $h = 61$ y $c = 60$. Por lo tanto, el perímetro es $11 + 61 + 60 = 132$.

5. ***Respuesta* (B)** Para cada vértice del cubo, sus tres vecinos determinan un triángulo equilátero. En cualquier triángulo equilátero determinado por tres vértices del cubo, los lados son diagonales sobre tres caras que se encuentran en un vértice. Entonces hay una correspondencia uno-a-uno entre los vértices del cubo y los triángulos equiláteros determinados por los vértices del cubo. Se sigue que el número de dichos triángulos es 8.

6. ***Respuesta* (B)** Recordando los productos notables:

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B) \qquad \text{y} \qquad A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2).$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}(a^6 - b^6) \div (a^3 - b^3) \div (a^2 - ab + b^2) &= \frac{a^6 - b^6}{(a^3 - b^3)(a^2 - ab + b^2)} \\ &= \frac{(a^3 - b^3)(a^3 + b^3)}{(a^3 - b^3)(a^2 - ab + b^2)} = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2} \\ &= \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2 - ab + b^2} = a + b\end{aligned}$$

7. ***Respuesta* (C)** Como $a_8 > a_{13}$, la diferencia de la progresión es un número negativo $-d$ (donde $d > 0$). Tenemos que

$$3(a_1 - 7d) = 5(a_1 - 12d)$$

o

$$a_1 = \frac{39d}{2} > 0.$$

Luego

$$a_{20} = a_1 - 19d = \frac{d}{2} > 0$$

mientras que

$$a_{21} = a_1 - 20d = -\frac{d}{2} < 0.$$

Se sigue que S_n es máximo cuando $n = 20$.

8. ***Respuesta* (A)** Efectuando la división tenemos que:

$$\frac{254,88}{0,177} = \frac{254880}{177} = \frac{144 \times 177 \times 10}{177} = 1440.$$

9. ***Respuesta* (D)** Como tenemos que

$$\text{peso de } X + \text{peso de } O = 13 \quad \text{y} \quad \text{peso de } Z + \text{peso de } O{=}9$$

se sigue que

$$\text{peso de } X = \text{peso de } Z + 4.$$

Luego, las opciones para los pesos de Z y de X son:

$$1 \text{ y } 5, \qquad 2 \text{ y } 6, \qquad 3 \text{ y } 7.$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\text{peso de } M + \text{peso de } P = 6 \quad \text{y} \quad \text{peso de } B + \text{peso de } E = 6.$$

Luego, los pesos de M, P, B, y E son todos menores que 6, o sea: 1, 2, 3, 4, 5. Pero ninguno de ellos puede tener peso igual a 3g. Concluimos que los pesos de Z y X son 3 y 7, respectivamente, lo que nos da que el peso de O es igual a 6g. Así tenemos que:

$$\text{peso de } O + \text{peso de } B + \text{peso de } E + \text{peso de } M + \text{peso de } P = 6 + 6 + 6 = 18.$$

10. ***Respuesta* (B)** Primero racionalizamos (los denominadores) y simplificamos x e y:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{1}{7-3}(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2 = \frac{1}{4}(10+2\sqrt{21}) = \frac{1}{2}(5+\sqrt{21}) \\ y &= \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{1}{7-3}(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2 = \frac{1}{4}(10-2\sqrt{21}) = \frac{1}{2}(5-\sqrt{21}) \end{aligned}$$

de donde se sigue que $x + y = 5$ y $xy = 1$.

Por otro lado, completando el cuadrado tenemos que:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + (x+y)^4 &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2 + 5^4 = (x^2+y^2)^2 - 2(xy)^2 + 625 \\ &= [x^2 + 2xy + y^2 - 2xy]^2 - 2 + 625 = [(x+y)^2 - 2xy]^2 + 623 \\ &= (5^2-2)^2 + 623 = 23^2 + 623 = 529 + 623 = 1152. \end{aligned}$$

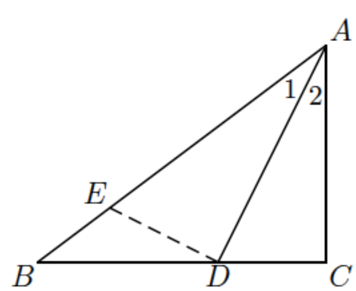
11. ***Respuesta* (A)** Primero notemos que para todo n entero positivo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{100}} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

12. ***Respuesta* (D)** Trazamos la perpendicular desde D sobre AB y obtenemos el punto E



Si doblamos la figura a lo largo de AD veremos que C y E coinciden, luego

$$AC = AE \qquad \text{y} \qquad DE = CD = 1,5\text{cm}.$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras al $\triangle BED$ tenemos que

$$BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \sqrt{6,25 - 2,25} = 2\ (\text{cm}).$$

Poniendo $AC = AE = x$ y aplicando el Teorema de Pitágoras al $\triangle ABC$ obtenemos la ecuación

$$(x+2)^2 = x^2 + 4^2 \quad \Rightarrow \quad 4x = 12$$

de donde se tiene $x = AC = 3$cm.

4. Clave de respuestas

1. (B)
2. (A)
3. (C)
4. (C)
5. (B)
6. (B)
7. (C)
8. (A)
9. (D)
10. (B)
11. (A)
12. (D)

Olimpiada Paceña de Matemática
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: olimpiadaOPM@gmail.com
http://www.opmat.org