Olimpiada Paceña de Matemática
Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática,
Facultad de Ciencias Puras y Naturales,
Universidad Mayor de San Andrés.

Cuadernos de la Olimpiada Paceña de Matemática 2016

Editado por

Charlie A. Lozano Correa
Jimmy Santamaria Torrez

Carrera de Matemática

50

1967-2017

La Paz – Bolivia

Prefacio

La Universidad Mayor de San Andrés además de formar profesionales, promueve la investigación y la interacción social. Una facultad que tradicionalmente tiene muchos resultados en investigación es la Facultad de Ciencias Puras y Naturales, sin embargo, también es consciente de las responsabilidades de la universidad pública boliviana con la sociedad. Los proyectos de interacción social son un vínculo de académicos universitarios y estudiantes con la sociedad. Son 12 los años de vida de la Olimpiada Paceña de Matemática (OPMat), como proyecto institucional de interacción social de la Carrera de Mateamática. En este tiempo ha ido creciendo en el número de profesores y estudiantes participantes; también en la oferta de material bibliográfico donde los que dirigen la OPMat han plasmado nuestra concepción como matemáticos de la resolución de problemas. Existen dos series de publicaciones: la revista periódica UKAMAU y los cuadernos de la OPMat. Agradecemos al Viceministerio de Ciencia y Tecnología publicar digitalmente los primeros tres cuadernos en el año 2016 como material de apoyo para la 6ta Olimpiada Científica Estudiantil Plurinacional Boliviana.

Esta publicación reuné los seis cuadernos que se entregaron a quienes participaron de la 11va Olimpiada Paceña de Matemática durante el año 2016. El Honorable Consejo de Carrera de Matemática ha autorizado a los editores de este material de olimpiadas, la cesión de derechos de publicación en medios digitales o impresos al Viceminiterio de Ciencia y Tecnología (FCPN/CM/Resolución 82/2017).

Lic. Zenón Condori Gonzales
Director
Carrera de Matemática

25 de abril de 2017

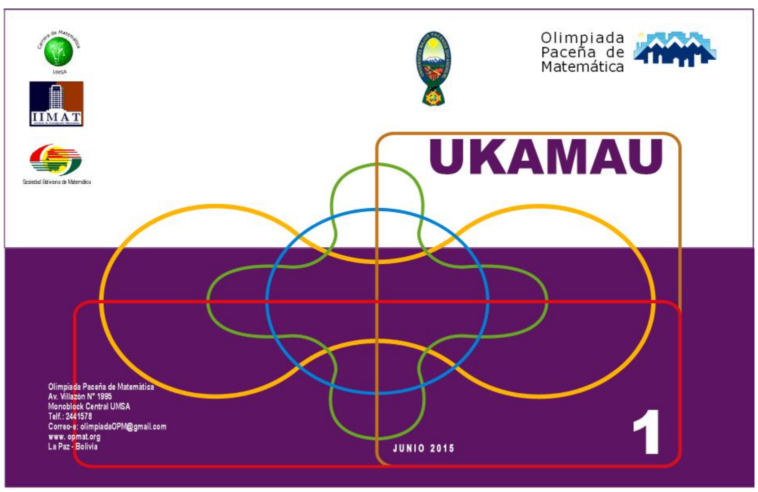
Índice

Sobre los editores

Charlie Lozano Correa es docente investigador titular de la Carrera de Matemática y miembro del Instituto de Investigación Matemática IIMAT de la Facultad de Ciencias Puras y Naturales de la UMSA. Obtuvo la Licenciatura en la UMSA y la Maestría en Matemáticas en la Universidade Federal Fluminense (UFF) de Brasil el 2004. Inició cursos de doctorado en Matemática en el Instituto de Matemática Pura e Aplicada IMPA de Brasil. Sus áreas de investigación son el Análisis no Lineal y los Sistemas Dinámicos. Trabajó en varias universidades del Sistema de la Universidad Boliviana. Actualmente es miembro del Comité Académico de la Olimpiada Paceña de Matemática.

Jimmy Santamaria Torrez es docente titular de la Carrera de Matemática y miembro del Instituto de Investigación Matemática-IIMAT de la Facultad de Ciencias Puras y Naturales de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA). Obtuvo la Licenciatura en Matemática en la UMSA, el Magister en Ciencias Mención Matemática en la Universidad Católica del Norte en Chile y el Doctorado en Matemática en el Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) del Brasil en el año 2007. Su área de investigación son los Sistemas Dinámicos. Su principal publicación es “Cocycles over partially hyperbolic maps”, Volumen 358 de Astérisque publicado por la “Société Mathématique de France”, en colaboración con el Medalla Fields Artur Ávila (Université Paris Diderot-Paris 7 e IMPA), Marcelo Viana (IMPA) y Amie Wilkinson (University of Chicago). Después de tres posdoctorados en el extranjero retornó a trabajar en su alma mater en el año 2013, desde entonces es Coordinador del Proyecto “Olimpiada Paceña de Matemática”. Actualmente es miembro de la Olimpiada Matemática Boliviana y miembro del Comité Académico Nacional de la 6ta Olimpiada Científica Estudiantil Plurinacional Boliviana.

Material de Olimpiadas: Revista UKAMAU



UKAMAU, es la revista de la Olimpiada Paceña de Matemática. La Revista UKAMAU es una publicación regular del Instituto de Investigación Matemática-IIMAT de la Universidad Mayor de San Andrés con la colaboración de la Sociedad Boliviana de Matemática. En el año 2015 se han publicado los dos primeros números de la Revista, el primer número tiene 109 problemas de olimpiadas para secundaria con solución completa, además de 63 problemas propuestos. El número dos tiene 145 problemas para secundaria con solución completa. En mayo de 2017 saldrá el tercer número conmemorativo por los 50 años de la creación de la Carrera de Matem[atica.

Cualquier número de la Revista UKAMAU tiene costo de Bs. 25, están disponibles para su compra en:

1. Biblioteca de la Carrera de Matemática. Edificio Antiguo, Monoblock Central. Av. Villazón No 1995(Horario de oficina).

2. Si está interesado en hacer la comprar desde el interior de Bolivia, escribir para olimpiadaOPM@gmail.com

Cuaderno N° 4 de la OPMat *
Categoría α
1ro y 2do de Secundaria

Editado por Jimmy Santamaria Torrez

Carrera de Matemática, Universidad Mayor de San Andrés

Presentación

Por segundo año el Proyecto Institucional Olimpiada Paceña de Matemática-OPMat presenta un grupo de problemas con los cuales los estudiantes y profesores interesados en participar de la OPMat puedan prepararse. Les recordamos que una olimpiada no es una evaluación de conocimientos y los problemas que encontrarán en este Cuaderno son una referencia de las características de los problemas que encontrarán en la Primera Fase de la OPMat y no es una descripción de contenidos.

Cada cuaderno está divido en cuatro secciones y sugerimos que se trabaje con la siguiente metodología. Una vez que se intente resolver un problema, compare su solución con la que se encuentra en la Claves, si no coinciden, puede ver las sugerencias y revisar su solución. Una vez que encuentre la solución compare con la que se da en el tercera sección. Una solución se valora y entiende mejor cuando se ha intentando resolver el problema por algún tiempo.

1 de agosto de 2016

Índice

*Olimpiada Paceña de Matemática (OPMat). Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA, Planta Baja del Edificio Antiguo, La Paz, Bolivia. Teléfono 2441578, e-mail: olimpiadaOPM@gmail.com, http://www.opmat.org

1. Enunciados de los problemas

1. En notación decimal $\frac{1}{10}+\frac{8}{10}+\frac{8}{100}$ es

   (A) 1,098 (B) 0,98 (C) 0,098 (D) 0,0908 (E) 9,8

2. ¿Cuál es el entero más próximo a $7\times\frac{3}{4}$?

   (A) 21 (B) 9 (C) 6 (D) 5 (E) 1

3. 2016 es coprimo con

   (A) 18 (B) 32 (C) 49 (D) 75 (E) 125

4. ¿Cuál de las siguientes multiplicaciones da el menor resultado?

   (A) 777×44 (B) 666×55 (C) 444×77 (D) 333×88 (E) 222×99

5. Wara tiene 45 fósforos. Ella construye un triángulo y un cuadrado, usando todos los fósforos. Cada lado del triángulo tiene 7 fósforos. ¿Cuántos fósforos utiliza en cada lado del cuadrado?

   (A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 4

6. La suma de los tres primeros números primos que son mayores a 49 es:

   (A) 165 (B) 169 (C) 171 (D) 173 (E) 177

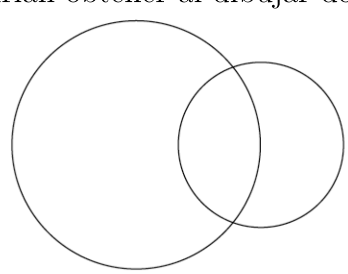
7. Cada año en la localidad de Pelechuco del departamento de La Paz se organiza un campeonato de ajedrez el tercer miércoles de mayo. ¿Cuál es la mayor fecha que puede tener el campeonato en un año?

   (A) 14 de mayo (B) 15 de mayo (C) 21 de mayo (D) 22 de mayo (E) 23 de mayo

8. Algunos chicles estaban en un recipiente. Conzuelo tomó la mitad de los chicles. Luego, Charlie sacó la mitad de los chicles que habían quedado. Después de esto, Clara tomó la mitad de los chicles restantes. Al final, quedaron 7 chicles en el recipiente. ¿Cuántos chicles habían en el recipiente al inicio?

   (A) 112 (B) 56 (C) 28 (D) 21 (E) 14

9. Al dibujar dos círculos obtenemos la figura abajo que tiene tres regiones. ¿Como máximo, cuántas regiones se podrían obtener al dibujar dos cuadrados?

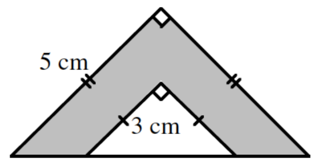


   (A) 9 (B) 8 (C) 6 (D) 5 (E) 3

10. Todos los números de 4 dígitos que usan los mismos dígitos que 2016 se escriben en una pizarra, en fila y en orden creciente. ¿Cuál es la mayor diferencia entre dos números que están juntos en la fila?

    (A) 5184 (B) 3400 (C) 3402 (D) 3960 (E) 594

11. La figura muestra dos triángulos rectángulos isósceles de catetos iguales como están marcados. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



    (A) 4,5 cm^2 (B) 8 cm^2 (C) 12,5 cm^2 (D) 16 cm^2 (E) 17 cm^2

12. Un reloj antiguo señala cada hora con igual número de campanadas. Para indicar las 6 a.m. tocó 6 veces la campana y demoró 15 segundos. ¿Cuántos segundos empleará para indicar las 8 a.m.?

    (A) 17 (B) 18 (C) 20 (D) 21 (E) 24

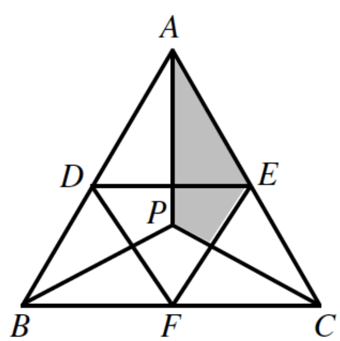
13. Paul, Quique, Rosa, Sara y Tania están sentados en una mesa redonda. Quique está en una silla entre Paul y Sara. Tania no está al lado de Sara. ¿Quiénes se sientan a los lados de Tania?

    (A) Paul y Rosa (B) Quique y Rosa (C) Paul y Quique (D) Sara y Quique (E) No se puede decir

14. $ABCD$ es un cuadrado formado por dos rectángulos idénticos y dos cuadrados. Cada rectángulo tiene área 4 cm^2 y cada cuadrado de área 16 cm^2. ¿Cuál es el área, en cm^2 del cuadrado $ABCD$?

    (A) 64 (B) 49 (C) 25 (D) 36 (E) 20

15. En el triángulo equilátero ABC se trazan segmentos desde un punto P a los vértices A, B y C para formar tres triángulos idénticos. Los puntos D, E y F son los puntos medios de los tres lados y se une como se muestra en la figura. ¿Qué fracción del área del triángulo ABC está sombreada?



    (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{5}{24}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{2}{9}$ (E) $\frac{2}{7}$

2. Sugerencias y hechos que ayudan

1. Note que existen dos fracciones con el mismo denominador. Las fracciones cuyos denominadores son potencias de 10 son fáciles de expresar con decimales.

2. Calcule el valor del número y determine entre que números enteros se encuentra.

3. Dos números enteros positivos son coprimos si el único divisor común que tienen es el 1.

4. Puede comenzar realizando las cinco multiplicaciones y determinar cuál es el menor resultado. Sin embargo, vea que existe cierta estructura en cada una de las multiplicaciones.

5. Partir determinando la cantidad de fósforos que se utilizaron para formar el triángulo.

6. Un número entero positivo mayor a 1 es primo cuando solamente es divisible por el 1 y por sí mismo. Por ejemplo 19 es primo porque solo es divisible por 1 y por 19. Existe un criterio para determinar si un número es primo, supongamos que queremos determinar si 97 es primo, sacamos su raiz cuadrada $\sqrt{97}$, que es un número entre 9 y 10. Dividimos 97 entre los números primos hasta el 9, es decir, por 2, 3, 5, y 7. Es sencillo ver que no es divisible por ninguno de estos números primos, por tanto, 97 es primo. Esta regla se cumple en general, para saber si N es primo, es suficiente verificar que todos los primos menores o iguales a $\sqrt{N}$ no lo dividen.

7. Determinar entre que días del mes puede estar el primer miércoles.

8. Podría determinar cuántos chicles hay antes de que cada persona tomará los suyos.

9. Los cuadrados no necesariamente son del mismo tamaño, intente varias configuraciones.

10. Encontrar todos los números y ordenarlos.

11. En un triángulo rectángulo en el que se conoce el tamaño de los lados que forman un ángulo de 90^o es sencillo encontrar el área.

12. Determine los intervalos de tiempo entre campanadas.

13. Realice un diagrama que simbolice la situación.

14. Determine el lado de cada uno de los dos cuadrados. Trate de ver como podría armar el cuadrado a partir de los dos cuadrados y dos rectángulos idénticos.

15. Partir de que el triángulo APC tiene 1/3 del área del triángulo ABC.

3. Soluciones

1. ***Respuesta* (B)**. Notemos primero que $\dfrac{1}{10}+\dfrac{8}{10}=\dfrac{9}{10}=0{,}9$ y que $\dfrac{8}{100}=0{,}08$. Entonces sumando se tiene $0{,}9+0{,}08=0{,}98$.

2. ***Respuesta* (D)**. $7\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{21}{4}=5\dfrac{1}{4}$. El entero más cercano a $5\dfrac{1}{4}$ es 5.

3. ***Respuesta* (E)**. Factorizando, tenemos $2016=2^5\times 3^2\times 7$. No es coprimo con 18 porque ambos son pares, es decir 2 es un divisor común. Por las mismas razones no es coprimo con 32. Notamos que 7 es factor de 49 y 2016. La suma de los dígitos de 75 es 12, entonces 3 es un divisor común de 75 y 2016. Finalmente $125=5^3$, por tanto 2016 y 125 son coprimos.

4. ***Respuesta* (E)**. En cada multiplicación se cumple que el primer factor es múltiplo de 111 y el segundo factor es múltiplo de 11. Entonces, expresamos cada uno de los productos de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcccl} 777\times 44 & = & 7\times 111\times 4\times 11 & = & 28\times(111\times 11)\\ 666\times 55 & = & 6\times 111\times 5\times 11 & = & 30\times(111\times 11)\\ 444\times 77 & = & 4\times 111\times 7\times 11 & = & 28\times(111\times 11)\\ 333\times 88 & = & 3\times 111\times 8\times 11 & = & 24\times(111\times 11)\\ 222\times 99 & = & 2\times 111\times 9\times 11 & = & 18\times(111\times 11) \end{array}$$

   De donde es fácil ver que el menor producto es el último.

5. ***Respuesta* (C)**. Como cada lado del triángulo tiene 7 fósforos, en el triángulo se usan $3\times 7=21$ fósforos. Con los restantes $45-21=24$ fósforos se forma un cuadrado, en cada lado se usa la misma cantidad de fósforos, por tanto utiliza $24\div 4=6$ fósforos en cada lado del cuadrado.

6. ***Respuesta* (D)**. Los tres primeros números primos mayores a 49 son 53, 59 y 61, cuya suma es 173.

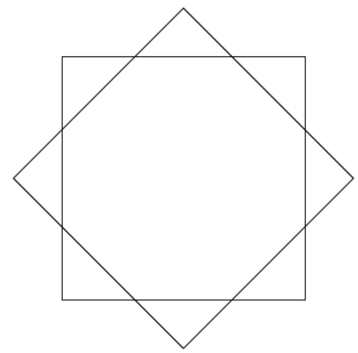
7. ***Respuesta* (C)**. El primer miércoles solo puede estar entre el 1 y el 7 de mayo, luego, el segundo miércoles puede estar entre el 8 y el 14 de mayo, finalmente, el tercer miércoles puede estar entre el 15 y el 21 de mayo. En conclusión, la mayor fecha que puede tener el campeonato de ajedrez es el 21 de mayo, cuando el primero de mayo cae un día jueves.

8. ***Respuesta* (B)**. *Solución 1.* Iremos en el sentido contrario al tiempo. Clara dejó la mitad, que son 7 chicles, por tanto antes de que ella tome chicles el recipiente tenía $2\times 7=14$ chicles. Estos son los que dejó Charlie, por lo tanto antes de que el tome chicles habían $2\times 14=28$ chicles en el recipiente. Por lo tanto, antes de que Conzuelo tomara chicles el recipiente contenía $2\times 28=56$ chicles.

   Solución 2. Notamos que al sacar la mitad de chicles que hay queda la mitad restante. Puesto que este procedimiento se realizó tres veces, lo que quedó fue $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

de lo que había al inicio. Como al final, quedaron 7 chicles, entonces al inicio habían $8 \times 7 = 56$ chicles.

9. ***Respuesta* (A)**. Observe la siguiente figura:

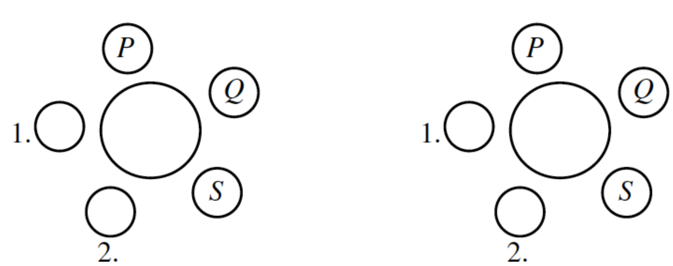


10. ***Respuesta* (C)**. Los números de 4 dígitos que usan los mismos dígitos que el 2016 pueden empezar con 1, 2 o 6. No pueden comenzar con 0 porque no sería un número de 4 dígitos. Podemos listarlos de menor a mayor: 1026, 1062, 1206, 1260, 1602, 1620, 2016, 2061, 2106, 2160, 2601, 2610, 6012, 6021, 6102, 6120, 6201, 6210. Entre dos consecutivos que comienzan con 1 la diferencia no es mayor que $1620 - 1026 = 594$, entre dos consecutivos que comienzan con 4 la diferencia no es mayor que $2610 - 2016 = 594$ y entre dos consecutivos que comienzan con 6 la diferencia no es mayor que $6210 - 6012 = 198$. Entre $2016 - 1620 = 396$ y $6012 - 2610 = 3402$. Claramente la mayor diferencia es entre 2610 y 6012.

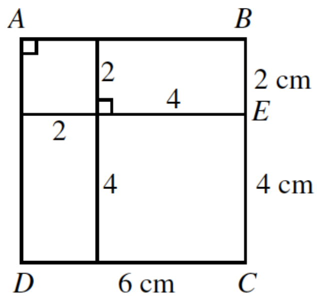
11. ***Respuesta* (B)**. El área del triángulo mayor es $\frac{1}{2} \times 5 \times 5$. El área del triángulo menor es $\frac{1}{2} \times 3 \times 3$. El área sombreada es: $\frac{1}{2} \times 5 \times 5 - \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{1}{2}(25 - 9) = 8$.

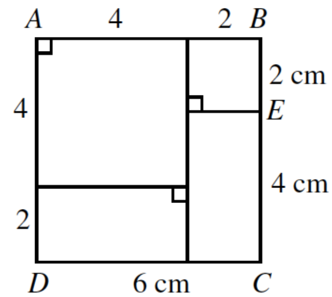
12. ***Respuesta* (D)**. A las 6 a.m. tocó seis veces, entre los cuales se perciben 5 intervalos y como el tiempo empleado es de 15 segundos podemos concluir que cada intervalo es de 3 segundos. A las 8 a.m. tendrá que dar 8 campanadas en 7 intervalos. Entonces, el tiempo que se empleará es de $7 \times 3 = 21$ segundos.

13. ***Respuesta* (A)**. Si Quique se sienta en la silla ente Paul y Sara entonces las personas deben estar sentadas como en la figura de abajo en la izquierda. Como Tania no se sienta junto a Sara, ella debe sentarse en la posición numerada como 1. y Rosa debe sentarse en la posición 2. Ver la figura de abajo a la derecha. Entonces Tania está entre Paul y Rosa .

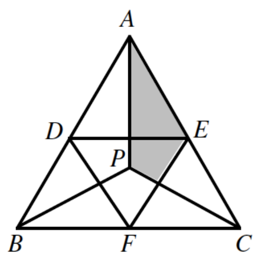


14. ***Respuesta* (D)**. Una manera de formar un cuadrado se muestra en la figura de la izquierda de abajo. El cuadrado menor tiene lado 2 cm y el cuadrado mayor tiene lado 4 cm. Por lo tanto, el cuadrado formado con las cuatro piezas tiene lado 6 cm. Luego, su área es 36 cm^2. Notamos que existen otras maneras de formar un cuadrado, por ejemplo, ver la figura de la derecha de abajo.



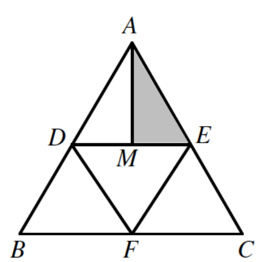


15. ***Respuesta* (B)**. *Solución 1.*

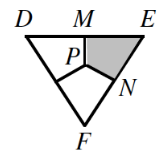


Como P es un punto de simetría en el triángulo ABC, el segmento CP divide al triángulo ECF en dos triángulos de igual área. Es decir, el área del triángulo EKC es la misma que la del triángulo FKC. Como el área del triángulo EFC es $\frac{1}{4}$ del área del triángulo ABC, entonces el área del triángulo EKC es igual a $\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$ del área del triángulo ABC. Nuevamente por simetría de P en el triángulo ABC, el área del triángulo APC es $\frac{1}{3}$ del área del triángulo ABC. Entonces el área sombreada es igual a $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)=\frac{5}{24}$ del área del triángulo ABC.

Solución 2. Como D, E y F son puntos medios de los lados, tenemos cuatro triángulos de la misma área: ADE, DBF , DEF y EFC. Sea M el punto medio de DC. Así el área de AME es $\frac{1}{8}$ del área del triángulo ABC.



En la figura de abajo $MENP$ es uno de tres cuadriláteros que forman al triángulo DEF, por tanto tiene $\frac{1}{3}$ de su área. Como el triángulo DEF tiene $\frac{1}{4}$ del área del triángulo ABC, entonces el cuadrilátero $MENP$ tiene $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ del área del triángulo ABC. Por lo tanto, el área sombreada es $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24}$ del área del triángulo ABC.



4. Clave de respuestas

1. (B)
2. (D)
3. (E)
4. (E)
5. (C)
6. (D)
7. (C)
8. (B)
9. (A)
10. (C)
11. (B)
12. (D)
13. (A)
14. (D)
15. (B)

Cuaderno N° 5 de la OPMat *
Categoría β
3ro y 4to de Secundaria

Editado por Jimmy Santamaria Torrez

Carrera de Matemática, Universidad Mayor de San Andrés

Presentación

Por segundo año el Proyecto Institucional Olimpiada Paceña de Matemática-OPMat presenta un grupo de problemas con los cuales los estudiantes y profesores interesados en participar de la OPMat puedan prepararse. Les recordamos que una olimpiada no es una evaluación de conocimientos y los problemas que encontrarán en este Cuaderno son una referencia de las características de los problemas que encontrarán en la Primera Fase de la OPMat y no es una descripción de contenidos.

Cada cuaderno está divido en cuatro secciones y sugerimos que se trabaje con la siguiente metodología. Una vez que se intente resolver un problema, compare su solución con la que se encuentra en la Claves, si no coinciden, puede ver las sugerencias y revisar su solución. Una vez que encuentre la solución compare con la que se da en el tercera sección. Una solución se valora y entiende mejor cuando se ha intentando resolver el problema por algún tiempo.

1 de agosto de 2016

Índice

*Olimpiada Paceña de Matemática (OPMat). Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA, Planta Baja del Edificio Antiguo, La Paz, Bolivia. Teléfono 2441578, e-mail: `olimpiadaOPM@gmail.com`, `http://www.opmat.org`

1. Enunciados de los problemas

1. Un fin de semana Carlitos despierta muy temprano y decide calcular el valor exacto de la multiplicación: $20^{50} \times 150^{20}$. El número de ceros en los que termina el resultado que encuentra Carlitos es:

   (A) 50 (B) 70 (C) 90 (D) 100 (E) 110

2. ¿Cuáles de los siguientes números están entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$?

   (A) $\frac{10}{8}$ (B) $\frac{6}{15}$ (C) $\frac{9}{14}$ (D) 1,2 (E) $\frac{11}{15}$

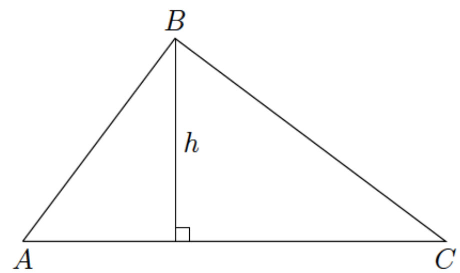
3. La suma de los primeros tres números primos que son mayores a 195 es:

   (A) 601 (B) 597 (C) 601 (D) 607 (E) 619

4. La maestra Mónica escribió en la pizarra los números 1, 7, 13, 19, 25, 31, y luego los alumnos hallaron todos los números primos que se pueden obtener al sumar dos o más números de la pizarra. ¿Cuántos números primos hallaron los alumnos?

   (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

5. En la figura $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con ángulo recto en B. Si $AB = 18$ y $AC = 30$. Determinar la longitud de la altura h sobre el lado AC.

   (A) 15,5 (B) 14,4 (C) $\frac{217}{15}$ (D) $\frac{47}{3}$ (E) 15,4

6. Cuando la base de un rectángulo decrece en un 10 % y la altura del rectángulo aumenta en un 10 %, el cambio en el área del rectángulo es de

   (A) 1 % de aumento (B) $\frac{1}{2}$ % menos (C) 0 % (D) $\frac{1}{2}$ % de aumento (E) 1 % menos

7. La fecha $09 - 11 - 13$, 9 de noviembre de 2013, está formada por tres números impares consecutivos en orden creciente. ¿Cuántas fechas en el siglo XXI, expresadas en dd-mm-aa, tienen esa propiedad?

   (A) 18 (B) 15 (C) 5 (D) 4 (E) 2

8. En un mes hubo 5 sábados y 5 domingos, pero solamente 4 viernes y 4 lunes. En el mes siguiente habrá:

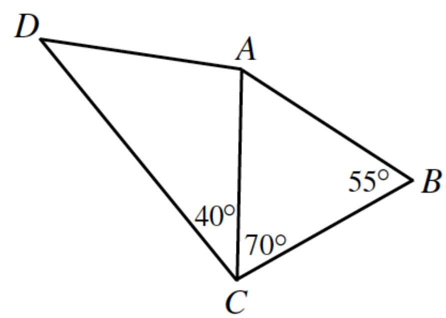
   (A) 5 jueves (B) 5 martes (C) 4 miércoles (D) 5 sábados (E) 5 domingos

9. Simplificar $\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.

(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) $2\sqrt{2}$ (D) 4 (E) 8

10. En la figura, $DA = CB$. ¿Cuál es la medidad de $\angle DAC$?

(A) 100° (B) 110° (C) 115° (D) 120° (E) 125°



11. Si x, y, z son numeros cualesquiera que satisfaces $x+y+z=0$, entonces $x^3+y^3+z^3$ es igual a

(A) $x^2+y^2+z^2$ (B) $2x^2y^2z^2$ (C) $3xyz$ (D) xyz (E) 0

12. Calcular $\dfrac{2016^3-1000^3-1016^3}{2016\times 1000\times 1016}$.

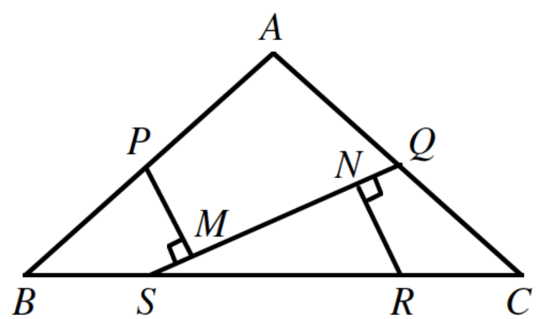
(A) 3 (B) 15 (C) 2016 (D) 0 (E) 16

13. Encontrar x^2+y^2 si x, y son soluciones del sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcl} xy & = & 4 \\ x^2y+xy^2+x+y & = & 45 \end{array}\right.$$

(A) 8 (B) 9 (C) 60 (D) 73 (E) 5

14. ABC es un triángulo isósceles con $AB = AC = 10$ y $BC = 12$. Los puntos S y R están en BC de tal forma que $BS : SR : RC = 1 : 2 : 1$. Los puntos medios de AB y AC son P y Q respectivamente. Se trazan perpendiculares desde P y R sobre SQ determinando los puntos M y N respectivamente. La longitud de MN es



(A) $\dfrac{9}{\sqrt{13}}$ (B) $\dfrac{10}{\sqrt{13}}$ (C) $\dfrac{11}{\sqrt{13}}$ (D) $\dfrac{12}{\sqrt{13}}$ (E) $\dfrac{5}{13}$

2. Sugerencias y hechos que ayudan

1. Un 0 al final de un número significa que 10 es un factor, o lo que es lo mismo 2×5 es un factor. Intentar factorizar y usar las reglas de exponentes.

2. Si a, b, c, d son número reales positivos, entonces $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ cuando y solamente cuando $ad < bc$.

3. Un número entero positivo mayor a 1 es primo cuando solamente es divisible por el 1 y por sí mismo. Por ejemplo 19 es primo porque solo es divisible por 1 y por 19. Existe un criterio para determinar si un número es primo, supongamos que queremos determinar si 97 es primo, sacamos su raiz cuadrada $\sqrt{97}$, que es un número entre 9 y 10. Dividimos 97 entre los números primos hasta el 9, es decir, por 2, 3, 5, y 7. Es sencillo ver que no es divisible por ninguno de estos números primos, por tanto, 97 es primo. Esta regla se cumple en general, para saber si N es primo, es suficiente verificar que todos los primos menores o iguales a $\sqrt{N}$ no lo dividen.

4. El único primo par es el 2. Todos los otros primos son impares. La suma de dos impares es un número par. La suma de cuatro números impares es un número par.

5. Cuando se conocen los catetos de un triángulo rectángulo es área se calcula inmediatamente.

6. Nos nos dan los lados del rectángulo, entonces podemos comenzar algebrizando el problema, es decir, sean a y b la altura y base del rectángulo original. Determine, los valores al realizar las variaciones porcentules del problema.

7. Comenzar considerando cuántos meses impares son posibles.

8. Note que no puede tratarse de frebrero, porque el mes del que se habla tiene cinco fines de semana.

9. Sea $x = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$, encuentre el valor de x^2.

10. La suma de todos los ángulos interiores de un triángulo es $180°$. En un triángulo si dos ángulos miden lo mismo entonces sus lados opuestos también miden lo mismo. En un triángulo si dos lados miden lo mismo entonces sus ángulos opuestos también miden lo mismo.

11. Si $x + y + z = 0$, entonces $z = -(x + y)$.

12. Comparar con el problema anterior.

13. No intente resolver el sistema, comience factorizando la parte de la izquierda de la segunda ecuación.

14. Trazar el cuadrilátero $PQRS$. Intente justificar que se trata de un rectángulo.

3. Soluciones

1. ***Respuesta* (C)**. $20^{50} \times 150^{20} = (2 \times 10)^{50}(15 \times 10)^{20} = 2^{50} \times 10^{50} \times (3 \times 5)^{20} \times 10^{20} = 2^{50} \times 3^{20} \times 5^{20} \times 10^{70} = 2^{30} \times 3^{20} \times (2 \times 5)^{20} \times 10^{70} = 2^{30} \times 3^{20} \times 10^{90}$.

2. ***Respuesta* (E)**. Las dos fracciones del problema tienen numerador menor a su recpectivo denominador, por tanto ambas son menores que 1. Esto descarta $\frac{10}{8}$ o 1,2 porque ambos son mayores a ambas fraccciones. Ordenando las 5 fracciones a considerar, tenemos
$$\frac{6}{15} < \frac{9}{14} < \frac{2}{3} < \frac{11}{15} < \frac{4}{5}.$$

3. ***Respuesta* (D)**. Podemos comenzar descartando a los números pares. $\sqrt{197}$ es un número entre 14 y 15, porque $14^2 = 196$ y $15^2 = 225$. Luego, para para ver si 197 es primo debemos dividirlo entre los números primos: $3, 5, 7, 11, 13$. Por los conocidos criterios de divisibilidad 197 no es divisible por 3, 5 ni 11. Al dividir 197 entre 7 y 13 encontramos restos 1 y 2 respectivamente. Por lo tanto 197 es primo. Similarmente, se puede mostrar que 199 es primo. 201 no es primo porque es múltiplo de 3, por otra parte, 205 es múltiplo de 5, 207 es múltiplo de 9 y 209 es múltiplo de 11 (Ver Pág. 3 del Cuaderno N° 1 de la OPMat). Se puede ver que 211 es primo. En consecuencia, la respuesta es $197 + 199 + 211 = 607$.

4. ***Respuesta* (A)**. Notemos que la suma de dos, cuatro o seis números de la lista es un número par mayor a 2 que es el único número entero positivo primo par. De tal forma, no se consigue un número primo con la suma de dos, cuatro o seis cualesquiera números. Cada uno de seis números de la lista tiene resto 1 al dividir entre 3, por tanto la suma de tres cualesquiera será divisible por 3 y mayor que 3, entonces no se conseguirá ningún número primo. La suma de los seis números es 96, sumar 5 de la lista es equivalente a restar el que resta de la suma: obtenemos entonces 95, 89, 83, 77, 71, 35. Entre estos son primos 71, 83 y 89.

5. ***Respuesta* (B)**. Por el Teorema de Pitágoras se sabe que $AB^2 + BC^2 = AC^2$, es decir, $18^2 + BC^2 = 30^2$. Entonces, $BC = 24$. El área de un triángulo ABC se denota por $[ABC]$. Entonces, como ABC tiene un ángulo de $90°$ en el vértice B, tenemos que $[ABC] = \frac{1}{2}AB \times BC = \frac{18 \times 24}{2} = 216$. Por otra parte, $[ABC] = \frac{1}{2}AC \times h$. Por consiguiente, obtenemos la ecuación $216 = \frac{30 \times h}{2}$. Despejando encontramos $h = \frac{216}{15} = 14{,}4$.

6. ***Respuesta* (E)**. Sean a y b la altura y base del rectángulo original respectivamente, así su área es $A = ab$. El nuevo rectángulo tiene una base igual a $1{,}1b$ y una altura igual a $0{,}9a$. Así, su área es $1{,}1 \times 0{,}9 \times ab = 0{,}99ab = 0{,}99A$. O sea, el área del nuevo rectángulo tiene un $1\,\%$ menos que la del rectángulo original.

7. ***Respuesta* (C)**. En cada fecha el número del medio representa el mes, ese número debe ser impar y mayor que 1. Entonces, los posibles valores son los siguientes:

$03, 05, 07, 09, 11$. Para cada uno de estos meses existe una única manera de completar una fecha con impares consecutivos: $01-03-05$, $03-05-07$, $05-07-09$, $07-09-11$ y $09-11-13$. Así que, existen 5 fechas que cumplen con las condiciones.

8. ***Respuesta* (B)**. Como el mes tiene 5 sábados y 5 domingos tenemos que el mes tiene por lo menos los días marcados en el siguiente diagrama:

L	M	M	J	V	S	D
					$*$	$*$
					$*$	$*$
					$*$	$*$
					$*$	$*$
					$*$	$*$

Notamos que entre el primer sábado y el último domingo marcados trancurren 30 días. Si el mes tuviese 31 días, entonces tendría que tener 5 viernes o 5 lunes, lo que sabemos que no puede pasar, por tanto, el mes tiene 30 días y el primer día del mes es el primer sábado marcado en el diagrama de arriba. Por tanto, el siguiente mes tiene 31 días y tiene la siguiente forma:

L	M	M	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

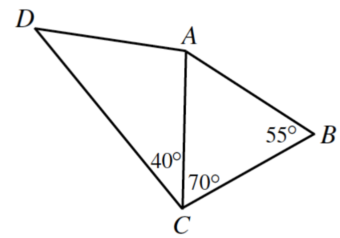
Así, la única afirmación correcta es que hay 5 martes.

9. ***Respuesta* (C)**. Sea $x = \sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$, notemos que $x > 0$. Por otra parte

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2 - 2\sqrt{5+2\sqrt{6}}\,\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2 \\ &= 5+2\sqrt{6}+2\sqrt{5^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}+5-2\sqrt{6} \\ &= 10-2\sqrt{25-24} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Por lo tanto $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

10. ***Respuesta* (A)**. En el $\triangle ABC$ se tiene que $\angle BAC = 180^\circ - (70^\circ + 55^\circ) = 55^\circ$. Como $\angle BAC = \angle ABC$, entonces el triángulo $\triangle ABC$ es isósceles con $AC = CB$. En el problema nos dicen que $DA = CB$, por lo tanto, $AD = AC$. Por lo tanto, $\triangle ADC$ es isósceles con $\angle ADC = \angle ACD = 40^\circ$. Finalmente, $\angle DCA = 180^\circ - (40^\circ + 40^\circ) = 100^\circ$.



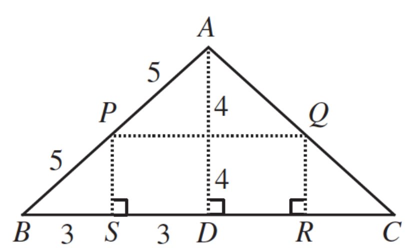
11. ***Respuesta* (C)**. Como $x+y+z=0$, entonces $z=-(x+y)$, reemplazando encontramos

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= x^3+y^3+(-(x+y))^3 \\ &= x^3+y^3+-(x+y)^3 \\ &= x^3+y^3-(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) \\ &= -3xy(x+y) \\ &= -3xy(-z) \\ &= 3xyz \end{aligned}$$

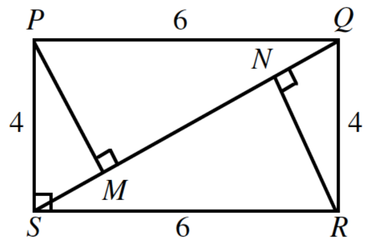
12. ***Respuesta* (A)**. Notemos que $2016^3-1000^3-1016^3 = 2016^3+(-1000)^3+(-1016)^3$ y $2016-1000-1016=0$, entonces por el problema anterior tenemos $2016^3-1000^3-1016^3 = 3(2016\times(-1000)\times(-1016))$. En consecuencia, $\dfrac{2016^3-1000^3-1016^3}{2016\times 1000\times 1016}=3$.

13. ***Respuesta* (D)**. Factorizamos la parte de la izquierda de la segunda ecuación como $x^2y+xy^2+x+y = xy(x+y)+(x+y) = (x+y)(xy+1)$. La primera de las ecuaciones del sistema es $xy=4$, entonces de la segunda ecuación del sistema, $(x+y)(4+1)=45$. De modo que, $x+y=9$. Recordemos la identidad algebraica $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$, de donde $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy = 9^2-2\times 4 = 81-8=73$.

14. ***Respuesta* (B)**. Comenzamos trazando una perpendicular desde A hasta D en el segmento BC, como $\triangle ABC$ es isósceles D es el punto medio de BC. Luego, $BD=6$. Por el Teorema de Pitágoras en el $\triangle ADB$, $6^2+AD^2=10^2$, de donde $AD=8$. Trazamos PS, entonces como $BP=PA=5$. Por las proporciones dadas en el problema $BS=SD=3$, así tenemos que $PS \parallel AD$. Por lo que $\angle PSB = 90°$. Además obtenemos que $PS=4$. Por simetría obtenemos $QR=4$ y $QR \parallel AD$. Esto implica que $PQRS$ es un rectángulo cuya base mide $PQ=SR=6$.



Para simplificar, focalizamos el problema en el rectángulo $PQRS$ con la información recientemente obtenida:



Por el Teorema de Pitágoras, $SQ^2 = 4^2 + 6^2 = 52$, así $SQ = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$. En el $\triangle SQR$ calculamos el valor de NR usando que el área $[SQR] = 12$, porque tiene la mitad del área del rectángulo que es $6 \times 4 = 12$. Formamos la ecuación $12 = \dfrac{1}{2} \times (\sqrt{52}) \times NR$, de donde $NR = \dfrac{12}{\sqrt{13}}$. Por el Teorema de Pitágoras en el $\triangle QNR$, tenemos $\left(\dfrac{12}{\sqrt{13}}\right)^2 + NQ^2 = 4^2$. Por lo tanto, $NQ = \dfrac{8}{\sqrt{13}}$. Por simetría $MS = NQ = \dfrac{8}{\sqrt{13}}$. Finalmente, $MN = 2\sqrt{13} - 2 \times \dfrac{8}{\sqrt{13}} = \dfrac{10}{\sqrt{13}}$.

4. Clave de respuestas

1. (C)
2. (E)
3. (D)
4. (A)
5. (B)
6. (E)
7. (C)
8. (B)
9. (C)
10. (A)
11. (C)
12. (A)
13. (D)
14. (B)

Cuaderno N° 6 de la OPMat *
Categoría β
5to y 6to de Secundaria

Editado por Charlie A. Lozano Correa

Carrera de Matemática, Universidad Mayor de San Andrés

Presentación

Por segundo año el Proyecto Institucional Olimpiada Paceña de Matemática-OPMat presenta un grupo de problemas con los cuales los estudiantes y profesores interesados en participar de la OPMat puedan prepararse. Les recordamos que una olimpiada no es una evaluación de conocimientos y los problemas que encontrarán en este Cuaderno son una referencia de las características de los problemas que encontrarán en la Primera Fase de la OPMat y no es una descripción de contenidos.

Cada cuaderno está divido en cuatro secciones y sugerimos que se trabaje con la siguiente metodología. Una vez que se intente resolver un problema, compare su solución con la que se encuentra en la Claves, si no coinciden, puede ver las sugerencias y revisar su solución. Una vez que encuentre la solución compare con la que se da en el tercera sección. Una solución se valora y entiende mejor cuando se ha intentando resolver el problema por algún tiempo.

1 de agosto de 2016

Índice

*Olimpiada Paceña de Matemática (OPMat). Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA, Planta Baja del Edificio Antiguo, La Paz, Bolivia. Teléfono 2441578, e-mail: olimpiadaOPM@gmail.com, http://www.opmat.org

1. Enunciados de los problemas

1. Si p es el mayor primo cuyos dígitos son números primos distintos, ¿cuál es el dígito de las unidades de p^2?

   (A) 9 (B) 4 (C) 5 (D) 7 (E) 3

2. Simplificar $\sqrt{7-\sqrt{15}-\sqrt{16-2\sqrt{15}}}$.

   (A) 0 (B) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{5}$ (E) $\sqrt{3}$

3. ¿Cuál es el dígito de las unidades de la suma de los cuadrados de los enteros del 1 al 2016?

   (A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 9 (E) 6

4. Si $\left(r+\frac{1}{r}\right)^2=3$, entonces $r^3+\frac{1}{r^3}$ es igual a

   (A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) 3 (E) 6

5. Cuatro puntos distintos en el plano son dispuestos de tal forma que los segmentos que los conectan tienen longitudes a, a, a, a, $2a$ y b. Calcula el cociente b/a:

   (A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $\sqrt{5}$ (D) 3 (E) π

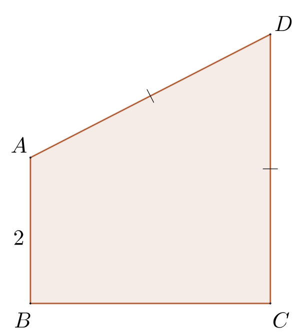
6. Aldo, Bruno y Carlos persiguen cuatro distintos pokemones. Ningún pokemon les gusta a los tres simultáneamente. Por lo tanto, por cada uno de los tres pares de jugadores, hay al menos un pokemon que les gusta a ambos y que le disgusta al tercero. ¿De cuantas maneras es esto posible?:

   (A) 108 (B) 132 (C) 671 (D) 846 (E) 1105

7. La suma de los primeros m enteros positivos impares es mayor a la suma de los primeros n enteros positivos pares, la diferencia entre ellos es 212. ¿Cuál es la suma de todos los posibles valores de n?

   (A) 255 (B) 256 (C) 257 (D) 258 (E) 259

8. Un cuadrilátero $ABCD$ cuyos lados tienen longitud entera tiene perímetro p y ángulos rectos en B y C. Además, $AB=2$ y $CD=AD$. ¿Cuátos posibles valores de p son menores a 2016?



   (A) 90 (B) 62 (C) 60 (D) 31 (E) 30

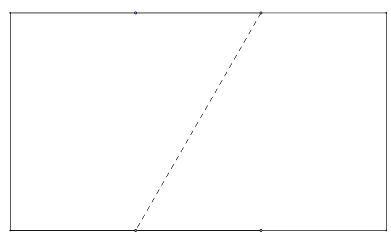
9. Sean x, y y z enteros positivos con $z \leq y \leq x$ tal que:

$$\begin{cases} x^2 + xy = 2019 + y^2 + z^2 \\ x^2 + 3y^2 + 3z^2 = -2005 + 3xy + 2xz + 2yz \end{cases}$$

¿Cuánto vale x?

(A) 249 (B) 250 (C) 251 (D) 254 (E) 253

10. Un pedazo de papel con el largo $\sqrt{3}$ veces el ancho tiene área A. Cada largo del papel es dividido en tres partes iguales y una linea punteada es trazada de la primera división a la segunda del lado opuesto, como se muestra en la figura. El papel es doblado por la linea trazada para formar una nueva figura de área B. ¿Cuál es la proporción $B : A$?



(A) $1 : 2$ (B) $3 : 5$ (C) $2 : 3$ (D) $3 : 4$ (E) $4 : 5$

11. El radio de una circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo de lados enteros es 2. ¿Cuántos de tales triángulos pueden haber?

(A) Infinitos (B) 1 (C) 2 (D) No existen (E) 2016

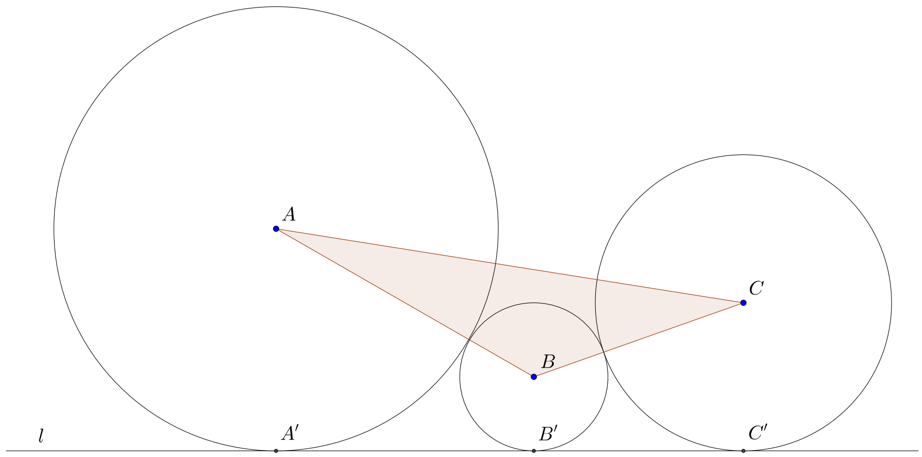
12. La ecuación polinomial de grado cuatro $x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 7x - 4 = 0$ tiene cuatro raíces reales a, b, c y d. ¿Cuál es el valor de la suma $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ad} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bd} + \frac{1}{cd}$?

(A) -1 (B) 1 (C) $\frac{7}{4}$ (D) $-\frac{7}{4}$ (E) 4

13. Sea $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ una lista de los 5 primeros enteros positivos tal que para cada $2 \leq i \leq 5$ o $a_i + 1$ o $a_i - 1$ o ambos aparecen antes de a_i en la lista. ¿Cuántas de tales listas hay?

(A) 16 (B) 25 (C) 32 (D) 5 (E) 10

14. Círculos con centros A, B y C tienen radios 3, 1 y 2, respectivamente. Los círculos están en el mismo lado de la linea l y son tangentes a l en A', B' y C', respectivamente, con B' entre A' y C'. El círculo de centro B es externamente tangente a los otros dos, como se aprecia en la figura. ¿Cuál es el área del triángulo ABC?



(A) $\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (E) $\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

2. Sugerencias y hechos que ayudan

1. ¿Cuales serían los posibles dígitos de p? Recuerda que el dígito de las unidades del producto de dos números está determinado por el producto de los respectivos dígitos de las unidades de cada uno de ellos.

2. Intente escribir a $16-2\sqrt{15}$ como un cuadrado perfecto.

3. Elabore una tabla de los primeros diez enteros positivos y sus respectivos cuadrado. Observa el dígito de las unidades y suma estos, ¿qué observas?

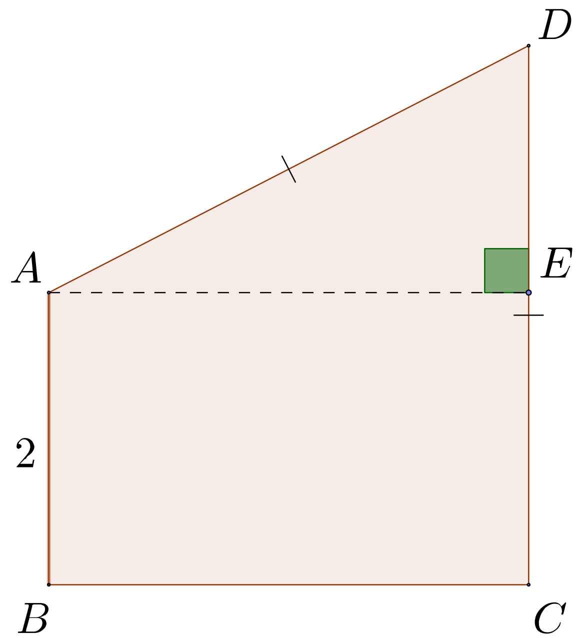
4. Si $a^2=3$, entonces $a=\sqrt{3}$ o $a=-\sqrt{3}$.

5. Analice las posibles posiciones de los puntos especialmente teniendo en cuanta que son cuatro puntos y que tienes el dato de las longitudes entre *todos y cada uno* de los segmentos que los conectan.

6. Analice los casos extremos. Primero cuando a los tres les gusta tres distintos pokemones, ¿de cuántas maneras es esto posible?. Por otro lado cuando a dos les gusta un mismo pokemon y al otro uno distinto, ¿de cuántas maneras es esto posible?

7. Recuerde que la suma de los primeros m enteros positivos impares es
$$1+3+\ldots+(2m-1)=m^2$$
y que la suma de los primeros n enteros positivos pares es
$$2+4+\ldots+2n=2(1+2+\ldots+n)=n(n+1)$$

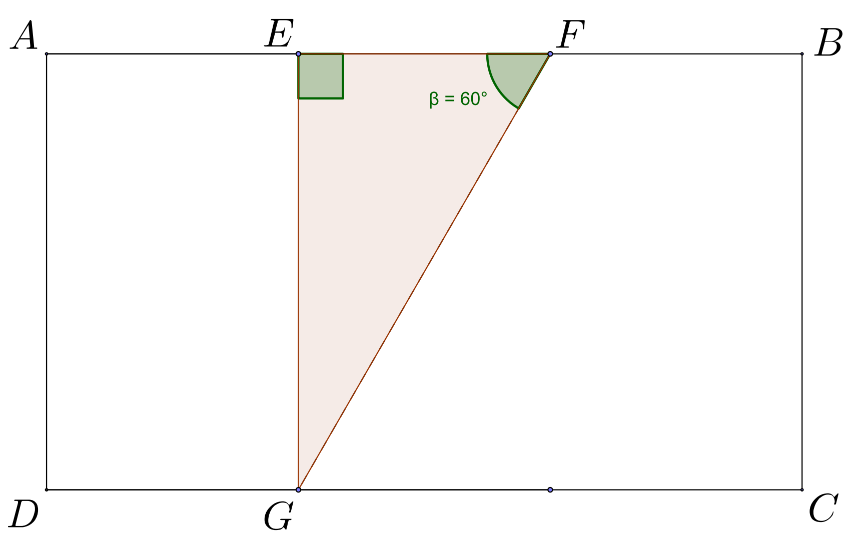
8. Trace en el cuadrilátero el segmento paralelo a BC que pasa por A y que intersecta el segmento DC en el punto E. Observa que el triángulo AED es rectángulo, establece entonces la relación que hay entre los lados del cuadrilátero teniendo en cuenta que los lados tienen longitud entera.



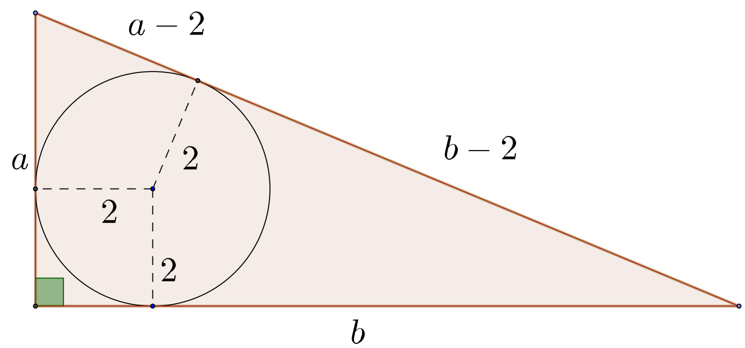
9. Observe cierta simetría en el sistema teniendo en cuanta la siguiente identidad:

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 = 2x^2+2y^2+2z^2-2(xy+xz+yz)$$

10. Coloque nombres a los vértices del rectángulo y a los puntos determinados por las subdivisiones, como se observa en la figura. Note que el triángulo EFG es recto en E, ¿por qué podemos concluir que el ángulo $\beta = \angle EFG$ es igual a 60°?. Teniendo en cuenta ahora la simetría, ¿qué podemos decir del triángulo AFG?. Luego realice la doblez y determine dónde está el vértice S.

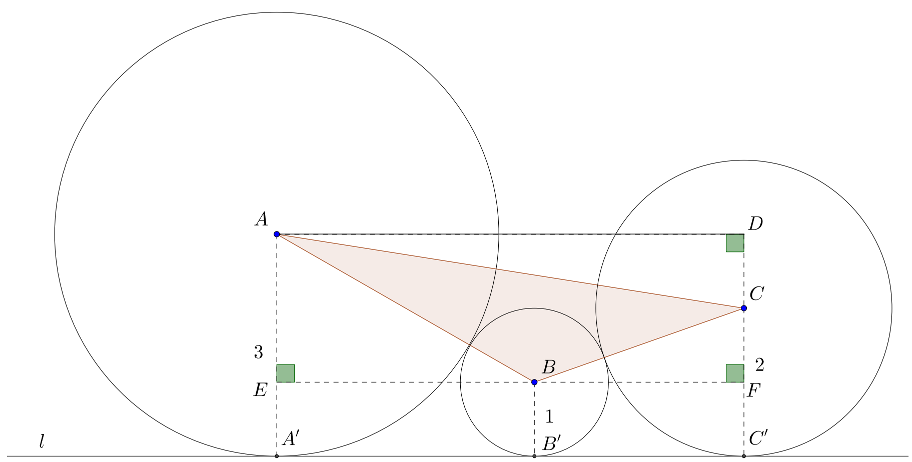


11. Sean a y b las medidas de los catetos del triángulo rectángulo en cuestión, ¿por qué podemos concluir que la hipotenusa se divide en dos segmentos de medidas $a-2$ y $b-2$?. Ahora utilice el teoremas de Pitágoras.



12. Si a, b, c y d son las raíces de la ecuación, entonces $x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 7x - 4 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$. Desarrolle el miembro derecho de esta igualdad.

13. Construya el rectángulo $ADFE$ de tal forma que los lados AD y EF sean ambos paralelos a la recta l. Determine usando el teorema de Pitágoras las áreas de los triángulos AEB, BFC y CDA, ¿por qué podemos determinar con esa información el área que buscamos?



14. Pruebe analizando las posibilidades de la lista cuando, por ejemplo la lista comienza en 3, ¿qué numero podría ser el siguiente, teniendo en cuenta la condición?

3. Soluciones

1. ***Respuesta* (A)**. El primo p solo puede tener como dígitos 2, 3, 5 o 7. Además hay primos mayores que todos ellos con dígitos primos distintos como el 13 o el 23. Por otro lado, el dígito de las unidades de p no puede ser ni 2 ni 5, pues en el primer caso este sería par y en el segundo sería divisible por 5. Así, el dígito de las unidades de p solo puede ser 3 o 7. Si el dígito de las unidades de p es 3, entonces el dígito de las unidades de p^2 es 9, de la misma forma si el dígito de las unidades es 7, como $7^2 = 49$, entonces el dígito de las unidades de p^2 es 9.

2. ***Respuesta* (B).**

$$\begin{aligned}
\sqrt{7-\sqrt{15}-\sqrt{16-2\sqrt{15}}} &= \sqrt{7-\sqrt{15}-\sqrt{(\sqrt{15})^2-2\sqrt{15}+1}}\\
&= \sqrt{7-\sqrt{15}-\sqrt{(\sqrt{15}-1)^2}}\\
&= \sqrt{7-\sqrt{15}-(\sqrt{15}-1)}\\
&= \sqrt{8-2\sqrt{15}}\\
&= \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}\\
&= \sqrt{5}-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

3. ***Respuesta* (E).** Elaboremos la tabla de los 10 primeros números, sus cuadrados y las unidades de estos cuadrados.

n	n^2	unidad
1	1	1
2	4	4
3	9	9
4	16	6
5	25	5
6	36	6
7	49	9
8	64	4
9	81	1
10	100	0

La suma de los dígitos de las unidades de estos primeros 10 números es 5. Observemos que el dígito de las unidades del cuadrado de un número está determinado por el cuadrado del dígito de sus unidades. Entonces, para los números del 11 al 20, los dígitos de las unidades de sus cuadrados son los mismos que los de la lista anterior, que de nuevo suman 5. Así, la suma de los dígitos de las unidades de los números del 1 al 20 es 0. En consecuencia, deducimos que la suma de los dígitos de las unidades de los números del 1 al 40 es 0 y así sucesivamente. Por lo tanto, la suma de los dígitos de las unidades de los números del 1 al 2000 es 0. La suma de los dígitos de las unidades de los números del 1 al 2010 es 5, la suma de los dígitos de las unidades de los números del 2011 al 2015 es 5, así la de los números del 1 al 2015 es 0 y la de los números del 1 al 2016 sería 6.

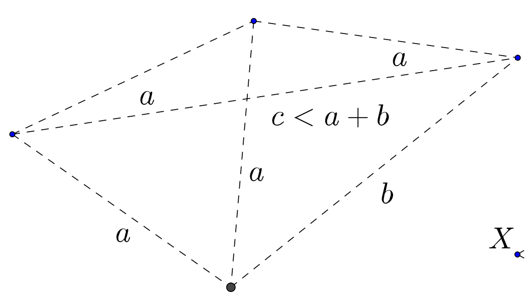
4. ***Respuesta* (C).** Si $\left(r+\frac{1}{r})\right)^2=3$, entonces $r+\frac{1}{r}=\sqrt{3}$ o $r+\frac{1}{r}=-\sqrt{3}$. Si es verdad el primer caso, elevamos cada miembro de $r+\frac{1}{r}=\sqrt{3}$ al cubo, obteniendo

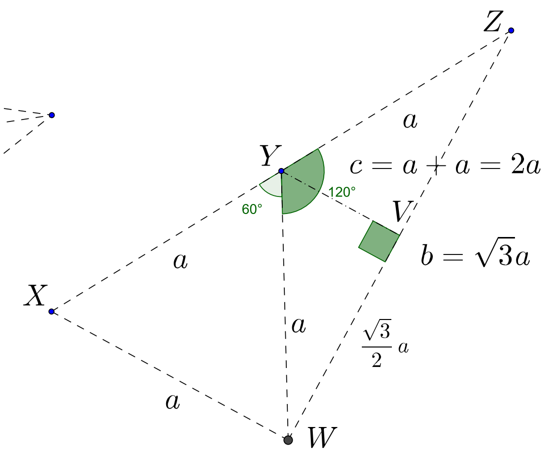
sucesivamente

$$\begin{aligned}\left(r+\frac{1}{r}\right)^3 &= \left(\sqrt{3}\right)^3\\ r^3+3r\frac{1}{r}\left(r+\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r^3} &= 3\sqrt{3}\\ r^3+3\sqrt{3}+\frac{1}{r^3} &= 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

Entonces $r^3+\dfrac{1}{r^3}=0$. Si fuese verdad $r+\dfrac{1}{r}=-\sqrt{3}$ se llega al mismo resultado con el mismo procedimiento.

5. ***Respuesta* (A)**. De la primera figura observe que tres puntos deben ser *colineales* (estar sobre una misma recta), caso contrario tendríamos cuatro longitudes distintas entre los puntos. Por consiguiente, la configuración correcta es la de la segunda figura. Como podemos observar los puntos X, Y y W forman un triángulo equilátero. Luego, sus ángulos internos miden $60°$ y entonces $\angle ZYW = 120°$. Como el triángulo WYZ es isósceles la altura YZ biseca el ángulo $\angle ZYW$ y como el triángulo YVW es rectángulo $WV=\frac{2\sqrt{3}}{2}a$, entonces $b=\sqrt{3}a$. Por lo tanto, $b/a=\sqrt{3}$





6. ***Respuesta* (B)**. Consideremos primero el caso en el que a ningún par les gusta el mismo pokemon. Primero, recordemos que hay tres (3) formas de escoger a los pares de chicos, como al par de jugadores. Para el par de jugadores que gustan de pokemones distintos, hay $\binom{4}{2}$ formas de escoger los pokemones. Para el segundo par solo habrán dos (2) posibilidades, ya que cada miembro de ese par gusta de un pokemon distinto respecto a ellos mismos y al anterior par de jugadores, pues en tal caso, la pareja formada por los jugadores que gustan del mismo pokemon violaría la condición. A la última pareja solo le queda una (1) alternativa por escoger que es la que no escogieron en el caso anterior. Tenemos así $3\cdot\binom{4}{2}\cdot 2=36$ formas en este caso. Segundo, el caso que todos los pares gusten un mismo pokemon. Para el primer par hay cuatro (4) posibles elecciones, para el segundo par hay tres (3) posibles elecciones y para el tercer par hay dos (2) posibilidades. Finalmente, en este mismo caso, el tercer pokemon puede ser

cualquiera de los cuatro (4), puesto que si no hubiera sido escogido en algún par o por el tercer jugador, de cualquier manera no influye en la condición. Como resultado, en este segundo caso hay $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 96$ formas. Como consecuencia, existen $36 + 96 = 132$ formas posibles.

7. ***Respuesta* (A)**. De las condiciones del problema $m^2 - n(n+1) = 212$ o equivalentemente $n^2 + n + (212 - m^2) = 0$. Entonces, podemos considerar una ecuación cuadrática en la incógnita n. Esta ecuación tiene soluciones

$$n = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4(m^2 - 212)}}{2} \text{ y } n = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4(m^2 - 212)}}{2}$$

que son números reales si el discriminante $\Delta = 1 - 4(212 - m^2) = 4m^2 - 847 > 0$ y tiene soluciones enteras si este discriminante es el cuadrado de un entero, es decir, $\Delta = c^2$ para algún entero positivo c y si $-1 \pm c$ es par, lo que significa que c es impar. Analicemos la ecuación $4m^2 - 847 = c^2$, entonces

$$\begin{aligned} 4m^2 - c^2 &= 847 \\ (2m - c)(2m + c) &= 7 \cdot 11^2 \end{aligned}$$

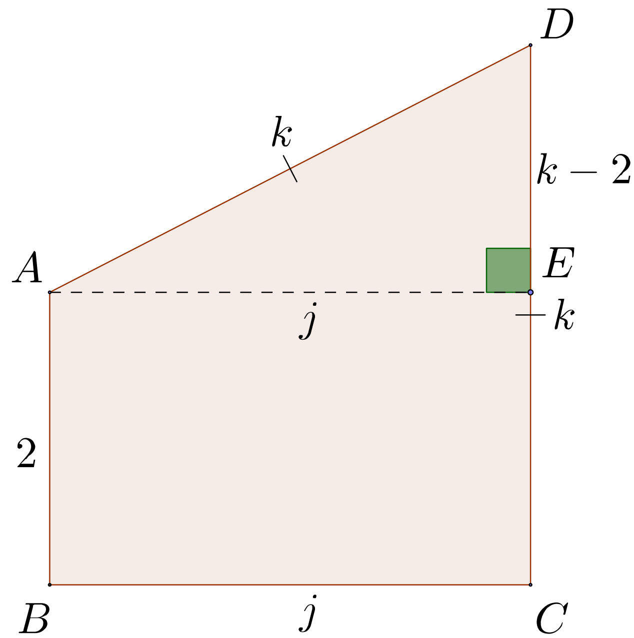
En la siguiente tabla estudiaremos las diferentes posibilidades para los factores del lado izquierdo de esta ecuación

$2m - c$	$2m + c$
$7 \cdot 11^2$	1
$7 \cdot 11$	11
7	11^2

En el primer caso sumando ambos factores tenemos $4m = 848$, de donde $m = 212$, $c^2 = 178929$ y $n = \frac{-1+\sqrt{178929}}{2} = 211$. En el segundo caso sumando ambos factores tenemos $4m = 88$, de donde $m = 22$, $c^2 = 1089$ y $n = \frac{-1+\sqrt{1089}}{2} = 16$. En el tercer caso sumando ambos factores tenemos $4m = 128$, de donde $m = 34$, $c^2 = 3249$ y $n = \frac{-1+\sqrt{3249}}{2} = 28$. Finalmente la suma de estos valores de n da como resultado 255.

8. ***Respuesta* (D)**. Por el Teorema de Pitágoras tenemos

$$\begin{aligned} j^2 + (k-2)^2 &= k^2 \\ j^2 + k^2 - 4k + 4 &= k^2 \\ j^2 &= 4k - 4 \\ &= 4(k-1) \\ k &= \frac{j^2}{4} + 1 \end{aligned}$$



Luego, dadas las condiciones del problema $p = 2 + j + 2k = 4 + j + \dfrac{j^2}{2} < 2016$.

Este valor de p es entero en tanto j sea par y como para $j = 62$, $p = 1988$ y para $j = 64$, $p = 2116$, podemos concluir que p puede tomar 31 valores.

9. ***Respuesta* (D)**. Podemos reescribir las ecuaciones como

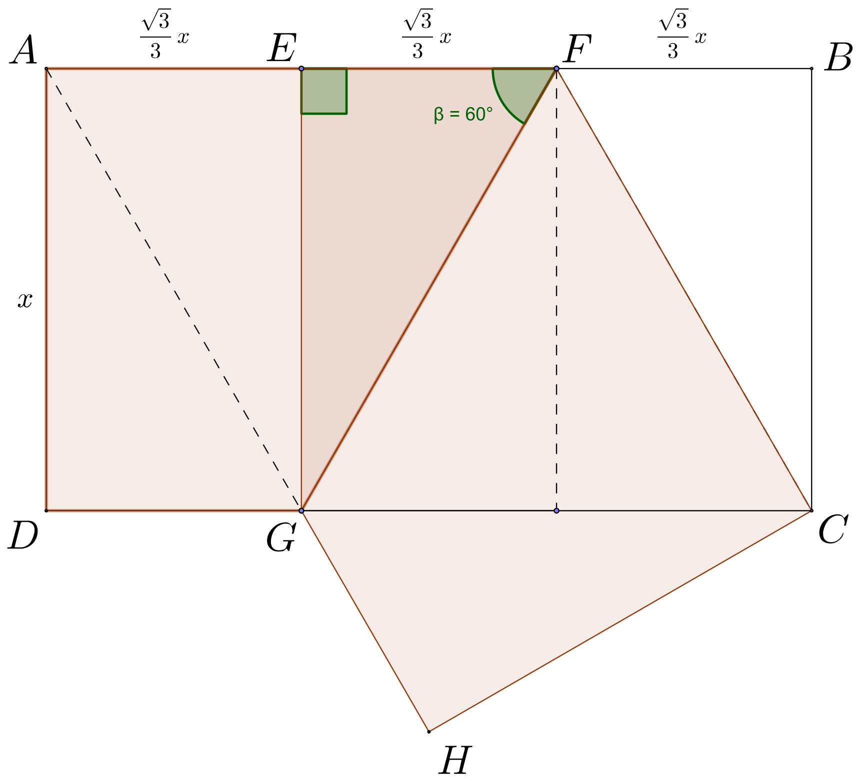
$$\begin{cases} -y^2 - z^2 + xy &= 2019 - x^2 \\ x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2(xy + xz + yz) &= -2005 - y^2 - z^2 + xy \end{cases}$$

Por consiguiente $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2(xy + xz + yz) = -2005 + 2019 - x^2 = 14 - x^2$ y $(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 = 2x^2+2y^2+2z^2-2(xy+xz+yz) = 14$. Podemos expresar 14 como la suma de 3 cuadrados de enteros de una sola forma: $14 = 1+2^2+3^2$. Luego, por las condiciones del problema $x - y = 2$, $x - z = 3$ y $y - z = 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - z^2 + xy &= x^2 - (x-2)^2 - (x-3)^2 + x(x-2) \\ 2019 &= 8x - 13 \end{aligned}$$

Así, $x = 254$.

10. ***Respuesta* (C)**. Sea x el ancho del rectángulo, como el triángulo EFG es rectángulo el ángulo $\angle EFG = 60°$. Por un razonamiento análogo el ángulo $\angle FAG = \angle BFC = \angle GFC = 60°$, luego los triángulos AFG y GFC son equiláteros y equivalentes. Posteriormente, al hacer la doblez el punto A se corresponde con el punto C. De la misma forma, luego de doblez los triángulos ADG y CHG son equivalentes. Podemos considerar el rectángulo como la unión de seis triángulos rectángulos todos equivalentes como en la figura. Luego de la doblez estaría constituido por 4. Así, la proporción es de 2 : 3.



11. ***Respuesta* (B)**. De la figura de la sugerencia podemos concluir por Pitágoras y elevando al cuadrado la ecuación tenemos que,

$$\begin{aligned}(a-2)+(b-2) &= \sqrt{a^2+b^2}\\ a^2+b^2+2ab-8a-8b+16 &= a^2+b^2\\ ab-4a-4b+8 &= 0\\ b &= \frac{4a-8}{a-4}\end{aligned}$$

Para que b sea un entero $a-4$ debe dividir a $4a-8$, pero observemos que $a-4$ divide a $-4(a-4)=16-4a$ y $a-4$ divide a $(4a-8)+(16-4a)=8$. Así, $a=5$ y $b=12$ o $a=12$ y $b=5$. En cualquier caso solo hay un tal triángulo.

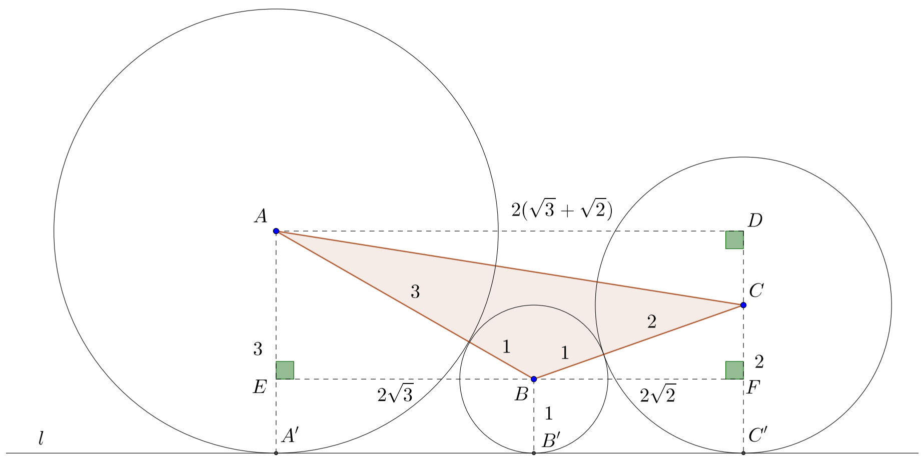
12. ***Respuesta* (A)**. Teniendo en cuenta que $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+bc+ad+bd+cd)x^2-(abc+abd+acd+bcd)x+abcd$, entonces

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}=\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{abcd}=\frac{4}{-4}=-1$$

13. ***Respuesta* (A)**. Una vez elegido el primer número de la lista y dadas las condiciones del problema, para el siguiente tenemos solo dos opciones, una unidad más o una unidad menos (en tanto no escojamos un número mayor que 5 o menor que 1). Para el tercero hecha la elección de los dos primeros, debemos escoger un número mayor o menor en

una unidad a alguno de los dos anteriores o a ambos, pero el número en cuestión es o mayor que el segundo o menor que el segundo, es decir de nuevo tenemos al final dos elecciones, aumentar o disminuir. De la misma forma para el cuarto número y el quinto. De manera que, hay $2^4 = 16$ posibles listas.

14. ***Respuesta* (E)**. En el triángulo rectángulo AEB la hipotenusa mide 4 y uno de los catetos 2, luego el tercero mide $2\sqrt{3}$. De la misma forma en el triángulo CFB la hipotenusa mide 3 y uno de los catetos 1, luego el tercero mide $2\sqrt{2}$, de donde concluimos que $AD = 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$. La suma de las áreas de de los triángulos AEB, CFB y ADC es $3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$ y el área del rectángulo $ADFE$ es $4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$. Por lo tanto, el área del triángulo ABC es $\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$



4. Clave de respuestas

1. (A)
2. (B)
3. (E)
4. (C)
5. (A)
6. (B)
7. (A)
8. (D)
9. (D)
10. (C)
11. (B)
12. (A)
13. (A)
14. (E)

Cuaderno N° 7 de la OPMat *
Categoría α
1ro y 2do de Secundaria

Editado por Jimmy Santamaria Torrez

Carrera de Matemática, Universidad Mayor de San Andrés

Presentación

Por primera vez el Proyecto Olimpiada Paceña de Matemática-OPMat presenta un grupo de problemas con los cuales los profesores y estudiantes clasificados a una segunda fase puedan prepararse. Les recordamos que una olimpiada no es una evaluación de conocimientos y los problemas que se muestran en este Cuaderno son una referencia de las características de los problemas que encontrarán en la Segunda Fase de la OPMat y no es una descripción de contenidos.

Cada cuaderno está divido en cuatro secciones y sugerimos que se trabaje con la siguiente metodología. Una vez que se intente resolver un problema, compare su solución con la que se encuentra en la Claves, si no coinciden, puede ver las sugerencias y revisar su solución. Una vez que encuentre la solución compare con la que se da en el tercera sección. Una solución se valora y entiende mejor cuando se ha intentando resolver el problema por algún tiempo.

3 de octubre de 2016

Índice

*Olimpiada Paceña de Matemática (OPMat). Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA, Planta Baja del Edificio Antiguo, La Paz, Bolivia. Teléfono 2441578, e-mail: olimpiadaOPM@gmail.com, http://www.opmat.org

1. Enunciados de los problemas

1. El número $\dfrac{2016 \times 2{,}016}{201{,}6 \times 20{,}16}$ es igual a:

   (A) 0,01 (B) 0,1 (C) 10 (D) 1 (E) 100

2. En tres partidos, el Bolivar anotó cuatro goles y le hicieron un gol. En estos tres partidos el equipo ganó uno, empató uno y perdió uno. ¿Cuál fue el resultado del partido ganado?

   (A) 3 : 0 (B) 4 : 0 (C) 3 : 1 (D) 4 : 1 (E) 2 : 0

3. En una clase de guitarra hay 10 alumnos, entre niños y niñas. La maestra tiene 80 dulces. Si le da a cada niña el mismo número de dulces, le sobran 3 dulces. ¿Cuántos niños hay en la clase?

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 7

4. Susana debe escoger una actividad de cada uno de los siguientes grupos: arte, deporte y música. Si en arte hay dos posibles actividades, en deporte tres y en música cuatro. ¿Cuántas posibles combinaciones de arte, deportes y música tiene Susana para elegir?

   (A) 9 (B) 24 (C) 12 (D) 14 (E) 20

5. Si el radio de una círculo se triplica, ¿cómo cambian el área y la longitud de la circunferencia?

   (A) El área es 3 veces mayor y la longitud de circunferencia es 3 veces mayor.
   (B) El área es 6 veces mayor y la longitud de circunferencia es 3 veces mayor.
   (C) El área es 3 veces mayor y la longitud de circunferencia es 6 veces mayor.
   (D) El área es 3 veces mayor y la longitud de circunferencia es 9 veces mayor.
   (E) El área es 9 veces mayor y la longitud de circunferencia es 3 veces mayor.

6. La fecha 01/03/05 (1 de marzo de 2005) contiene tres números impares consecutivos en orden creciente. Esta es la primera fecha con esta propiedad en el siglo 21. Incluyendo la fecha dada como ejemplo, ¿cuántas fechas (expresadas en el formato $dd/mm/aa$) tienen esa propiedad en el siglo 21?

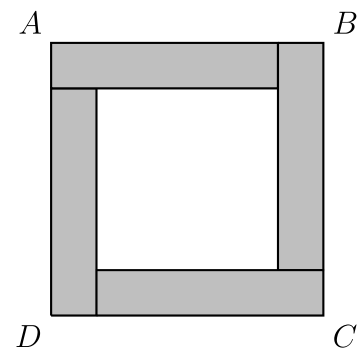
   (A) 16 (B) 13 (C) 4 (D) 5 (E) 6

7. Calcular la suma

   $$0{,}123451234512345123\ldots + 0{,}987659876598765987\ldots$$

   donde los decimales son infinitos.

8. Con cuatro tiras rectangulares iguales de perímetro 40 cm cada una se construye el cuadrado $ABCD$ de la derecha. ¿Cuál es el área del cuadrado $ABCD$?

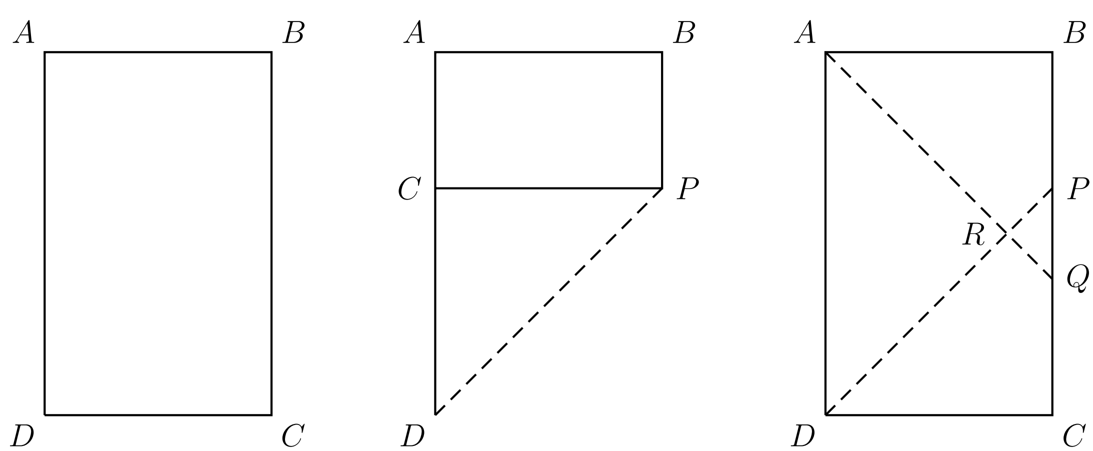


9. Existen varias formas de reunir Bs. 207 usando solamente monedas de Bs. 2 y monedas de Bs. 5. Por ejemplo, usando 1 moneda de Bs. 2 y 41 monedas de Bs. 5. Contanto esta forma, ¿de cuántas formas diferentes se pueden reunir Bs. 207 usando solamente monedas de Bs. 2 y monedas de Bs. 5?

10. Fernando miente todos los lunes, martes, sábados y domingos; y el resto de la semana dice la verdad. Guillermo miente los miércoles, jueves, viernes y sábados; y el resto de la semana dice la verdad. Un día Fernando dijo “Guillermo no miente hoy". ¿Qué día de la semana podría ser?

11. Una gata tiene 7 gatitos: blanco, negro, café, blanco-negro, blanco-café, negro-café y blanco-negro-café. ¿Cuántas maneras hay de escoger 4 gatitos de modo que cualesquiera dos de ellos tengan un color común? Por ejemplo, si excogemos los gatitos blanco, blanco-negro, blanco-café y blanco-negro-café se cumple que cualesquiera dos tienen un color en común: el blanco.

12. Una trozo rectangular de papel $ABCD$ se dobla de manera que el borde CD se coloca exactamente sobre el borde AD, se forma un pliegue DP. El papel se desdobla y se dobla nuevamente de manera que el borde AB se cola exactamente sobre el borde AD, se forma un segundo pliegue AQ. Los dos pliegues de cortan en R, formando los triángulos $\triangle PQR$ y $\triangle ADR$. Ver las figuras de abajo. Si $AB = 5$ cm y $AD = 8$ cm. Encontrar el área del cuadrilátero $DRQC$.



2. Sugerencias y hechos que ayudan

1. Recuerde que pasa con un número cuando se divide por 10, por $100 = 10^2$, por $1000 = 10^3$.
2. Note que sólo le hicieron un gol en los tres partidos a Bolivar, trate de determinar en qué partido debió recibir el gol.
3. Determine cuántos dulces se repartieron entre las niñas y la relación que debe existir con el número de niñas si cada una recibió la misma cantidad de dulces.
4. Comience analizando dos grupos de actividades. Por ejemplo, deportes y música. Por cada actividad de deportes cuántas actividades de música puede elegir, a partir de este análisis determinar las combinaciones diferentes de estos dos grupos de actividades. Ahora, con este resultado incorpore la tercerca actividad.
5. Recuerde que el área de un círculo de radio r es πr^2 y la longitud de circunferencia es $2\pi r$. Podría dar algunos valores particulares a r para ver como es la variación.
6. Dos impares consecutivos están a una distancia de 2; por ejemplo 1 y 3 son impares consecutivos. Ahora, si se conoce el día o el mes analizar cuántas fechas con las características del problema pueden existir.
7. Transforme cada número en una fracción.
8. Determine la relación de la longitud de un lado del cuadrado con el perímetro de cada uno de los rectángulos.
9. Note que no es posible reunir Bs. 207 con solamente monedas de Bs. 5 porque usando solamente monedas de Bs. 5 se pueden conseguir cantidades que son múltiplos de 5. Recuerde el criterio de divisibilidad por 5. Determine que la cantidad de monedas de Bs. 5 debe ser impar.
10. Analice el caso en el que Fernando dice la verdad y el caso en el que miente.
11. Analice que pasa si se elige un gatito de un solo color. Que pasa si no se elige ningún gatito de un solo color.
12. Encuentre el área del cuadrilátero $DRQC$ a partir de las áreas de los triángulos $\triangle PRQ$ y $\triangle PDC$.

3. Soluciones

1. ***Respuesta*** **(D)**. Notamos que

$$\frac{2016\times 2{,}016}{201{,}6\times 20{,}16}=\frac{\dfrac{2016\times 2016}{10^3}}{\dfrac{2016\times 2016}{10\times 10^2}}=1.$$

2. ***Respuesta*** **(B)**. Como solamente le hicieron un gol, entonces el partido que perdió fue con el resultado de 0 a 1. Como empató un partido y no le hicieron más goles, empató con el resultado de 0 a 0. Entonces, como anotó 4 goles, ganó con resultado de 4 a 0.

3. ***Respuesta*** **(C)**. Al repartir los dulces, le sobran 3 de 80, es decir que la maestra repartió 77 dulces. Como cada niña recibió la misma cantidad de dulces, entonces la cantidad de niñas divide a 77. Ahora $77 = 7 \times 11$, de tal forma que necesariamente la cantidad de niñas es 7, por tanto la cantidad de niños es 3. De acuerdo al enunciado del problema estamos suponiendo que hay más de una niña.

4. ***Respuesta*** **(B)**. Por cada una de las actividades de arte, Susana puede escoger 1 de 3 actividades en deportes y 1 de 4 actividades en música. Entonces, por cada una de las actividades de arte, Susana tiene $3 \times 4 = 12$ posibles combinaciones de deportes y música. Como Susana tiene dos posibles elecciones en arte, ella tiene en total $2\times 12 = 24$ combinaciones de una actividad de arte, una de deportes y una de música.

5. ***Respuesta*** **(E)**. Supongamos que el radio inicial es 1. En consecuencia, el área inicial es $\pi(1)^2 = \pi$ y la longitud de circunferencia incicial es $2\pi(1) = 2\pi$. Cuando el radio se triplica, el nuevo radio es 3. La nueva área es $\pi(3)^2 = 9\pi$ y la nueva longitud de circunferencia es $2\pi(3) = 6\pi = 3(2\pi)$. Es decir, el área es 9 veces mayor y la longitud de circunferencia es 3 veces mayor.

6. ***Respuesta*** **(D)**. En cada fecha el número del medio representa el mes, como es número debe ser impar y mayor que 01, puede tomar los siguientes valores: $03, 05, 07, 09, 11$. Para cada valor que toma el mes existe una sola forma de completar la fecha porque los tres números deben ser impares consecutivos. Entonces, tenemos las sigiuentes fechas 01/03/05, 03/05/07, 05/07/09, 07/09/11 y 09/11/13. En total son 5 fechas posibles.

7. ***Respuesta:*** 400 cm^2. Vemos que la longitud del lado del cuadrado es igual a la suma de la base y la altura de cada uno de los rectángulos. Como el perímetro es 40 cm, la suma de la base más la altura es la mitad, es decir 20 cm. Así que, el área del cuadrado $ABCD$ es $20 \times 20 = 400$ cm^2.

8. ***Respuesta:*** $\dfrac{10}{9} = 1{,}11111\ldots$. Convertimos cada número en su forma decimal a una fracción:

$$0{,}1234512345\ldots = \frac{12345}{99999},$$

por otra parte,

$$0{,}9876598765\ldots = \frac{98765}{99999}.$$

No hemos intentado simplificar las fracciones porque de esta forma ya tienen denominador común. Entonces la suma pedida es

$$\frac{12345}{99999}+\frac{98765}{99999}=\frac{111110}{99999}=\frac{10}{9}=1{,}11111\ldots$$

9. ***Respuesta:* 21 formas diferentes**. *Solución 1.* Usando solamente monedas de Bs. 5, se pueden reunir solamente cantidades de dinero que sean múltiplos de 5. Los múltiplos de 5 terminan en 0 o en 5.
Para reunir Bs. 207 desde un múltiplo de 5 usando exclusivamente monedas de Bs. 2, el múltiplo de 5 debe terminar en 5. Si terminará en 0, sería par y aumentando monedas de Bs. 2 siempre tendríamos un cantidad par de dinero y no podríamos reunir exactamente la suma de Bs. 207.
Notemos que a cualquier cantidad de dinero menor a 207, que termine en 5, es posible adicionar suficientes monedas de Bs. 2 hasta llegar a Bs. 207. Los múltiplos de 5 que terminan en 5 y son menores a 207 son 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 105, 115, 125, 135, 145, 155, 165, 175, 185, 195 y 205. Se ven dos grupos de 10 y un adicional, es decir, son 21 números. Cada uno determina una única forma de combinar monedas de Bs. 5 y Bs. 2 para formas Bs. 207.

   Solución 2. Notemos que por lo menos debemos usar una moneda de Bs 2. Observemos también que 2 monedas de Bs. 5 son equivalentes a 5 monedas de Bs 2. Comenzando con el caso 1 moneda de Bs. 2 y 41 monedas de Bs 5, vamos realizado “cambios"de monedas de 5 por monedas de 2. En el primer cambio obtenemos 6 monedas de Bs. 2 y 39 monedas de Bs. 5. Haciendo nuevamente un “cambio"tenemos 11 monedas de Bs. 2 y 37 monedas de Bs. 5. Podemos continuar con este proceso hasta llegar a tener solamente 1 moneda de Bs. 5. Entonces, las cantidades posibles de monedas de Bs. 5 son $41, 39, 37, 35, \ldots 1$, es decir todos los números impares menores o iguales a 41, que son 21 números.

10. ***Respuesta:* Sábado**. Comenzamos ordenando la información que disponemos en la siguiente tabla:

	L	Ma	Mi	J	V	S	D
Fernando	M	M	V	V	V	M	M
Guillermo	V	V	M	M	M	M	V

   Donde se especifíca los días que cada uno miente con una M y los días que dice la verdad con una V. Al realizar la afirmación, Fernando miente o dice la verdad. Analizaremos ambos casos:

   - Si Fernando dice la verdad, entonces Guillermo debe decir la verdad ese día. Entonces, se trata de un día en el que ambos dicen la verdad, pero de la tabla se nota que ese día no existe.
   - Si Fernando miente, entonces Guillemo también debe mentir ese día. En la tabla confirmamos que existe un único día con esa propiedad, el sábado.

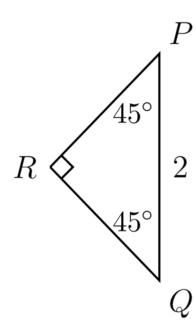
11. ***Respuesta:* 4 formas**. Los gatitos son:

- De un solo color: blanco, negro, café.
- De dos colores: blanco-negro, blanco-café, negro-café.
- De tres colores: blanco-negro-café.

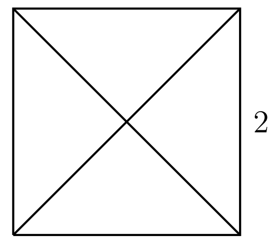
Si se escoge un gatito de un solo color ya no se puede escoger otro de un solo color porque tendríamos dos gatitos de colores diferentes. Por tanto, se tienen los siguientes casos:

- *Se escoge un gatito de un solo color.* Si se escoge el gatito blanco, los otros tres deben tener blanco. Solo hay un caso: blanco, blanco-negro, blanco-café, blanco-negro-café. Si se escoge el gatito negro, también hay un solo caso: negro, blanco-negro, negro-café, blanco-negro-café. Si se escoge el gatito café, también hay un solo caso: café, blanco-café, negro-café, blanco-negro-café.
- *No se escoge ningún gatito de un solo color.* En este caso se escogen a todos los otros cuatro gatitos y se cumple la condición del problema: blanco-negro, blanco-café, negro-café, blanco-negro-café.

12. ***Respuesta:*** 11,5 **cm^2**. Para encontrar el área del cuadrilátero $DRQC$, sustraeremos el área del triángulo $\triangle PRQ$ del área del triángulo $\triangle PDC$.
Primero, calcularemos el área del $\triangle PDC$. Sabemos que $DC = AB = 5$ y que $\angle DCP = 90°$. Cuando el pedazo de papel se dobla por primera vez, PC es paralelo a AB, además $PC = AB = 5$ cm. Por consiguiente, el área de $\triangle PDC$ es $\frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2} = 12{,}5$ cm^2.
Ahora, calcularemos el área del $\triangle PRQ$. Sabemos que $\triangle PDC$ tiene $PC = 5$ cm, $\angle PDC = 90°$ y es isósceles con $PC = CD$. Entonces, $\angle DPC = 45°$. Similarmente, $\triangle ABQ$ tiene $AB = BQ = 5$ cm y $\angle BQA = 45°$. Así, como $BC = 8$ cm y $PB = BC - PC$, entonces $PB = 3$ cm. Similarmente, $AC = 3$ cm. Como $PQ = BC - BP - QC$, entonces $PQ = 2$ cm. Notemos también que $\angle RPQ = \angle DPC = 45°$ y $\angle RQP = \angle BQA = 45°$.



Usando cuatro de estos triángulo se puede formar un cuadrado de lado 2 cm, y por tanto área de 4 cm^2.



El área de uno de estos cuatro triángulos, por ejemplo $\triangle PQR$, es igual a $\dfrac{1}{4}$ del área del cuadrado que es 4 cm^2, es decir es 1 cm^2. En consecuencia, el área del cuadrilátero $DRQC$ es $12{,}5 - 1 = 11{,}5$ cm^2.

4. Clave de respuestas

1. (D)
2. (B)
3. (C)
4. (B)
5. (E)
6. (D)
7. 400 cm^2
8. $\dfrac{10}{9} = 1{,}111\ldots$
9. 21 formas diferentes
10. Sábado
11. 4 formas
12. 11,5 cm^2

Cuaderno N° 8 de la OPMat *
Categoría β
5to y 6to de Secundaria

Editado por Charlie A. Lozano Correa

Carrera de Matemática, Universidad Mayor de San Andrés

Presentación

Por primera vez el Proyecto Olimpiada Paceña de Matemática-OPMat presenta un grupo de problemas con los cuales los profesores y estudiantes clasificados a una segunda fase puedan prepararse. Les recordamos que una olimpiada no es una evaluación de conocimientos y los problemas que se muestran en este Cuaderno son una referencia de las características de los problemas que encontrarán en la Segunda Fase de la OPMat y no es una descripción de contenidos.

Cada cuaderno está divido en cuatro secciones y sugerimos que se trabaje con la siguiente metodología. Una vez que se intente resolver un problema, compare su solución con la que se encuentra en la Claves, si no coinciden, puede ver las sugerencias y revisar su solución. Una vez que encuentre la solución compare con la que se da en el tercera sección. Una solución se valora y entiende mejor cuando se ha intentando resolver el problema por algún tiempo.

3 de octubre de 2016

Índice

*Olimpiada Paceña de Matemática (OPMat). Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA, Planta Baja del Edificio Antiguo, La Paz, Bolivia. Teléfono 2441578, e-mail: `olimpiadaOPM@gmail.com`, `http://www.opmat.org`

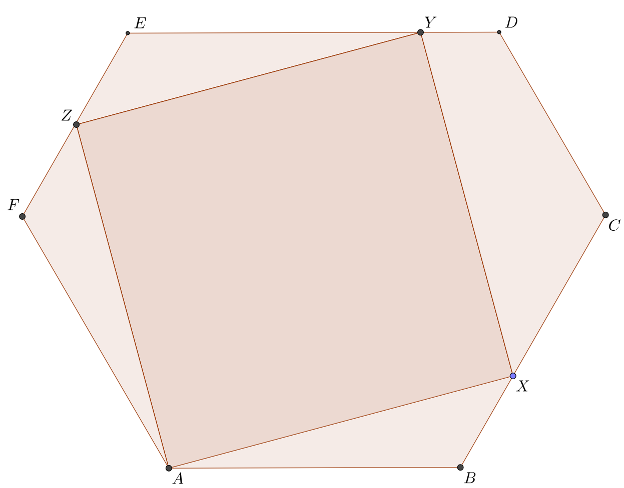
1. Enunciados de los problemas

1. ¿Cuál es el dígito de las unidades de la suma de los dígitos de las decenas de los números de la serie
$$2016, 2016^2, \ldots, 2016^{2017}$$
(A) 9 (B) 4 (C) 5 (D) 7 (E) 1

2. ¿Cuál es el número de pares de enteros positivos (p, q) con $p + q \leq 100$ talque
$$\frac{p+\frac{1}{q}}{q+\frac{1}{p}} = 17 \text{ ?}$$
:
(A) 0 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

3. La media aritmética de dos enteros positivos x, y es un número de dos dígitos. La media geométrica $\sqrt{xy}$ se obtiene revirtiendo el orden de los dígitos de la media aritmética. ¿Cuánto es $|x - y|$?
(A) 66 (B) 44 (C) 6 (D) 1 (E) 4

4. Un cuadrado $AXYZ$ está inscrito en un hexágono equiangular $ABCDEF$ con X sobre BC, Y sobre DE y Z sobre EF. Ver la figura inferior. Si $AB = 40$ y $EF = 41\left(\sqrt{3} - 1\right)$, ¿cuál es el lado del cuadrado?



(A) $20\sqrt{3}$ (B) $40\sqrt{3}$ (C) $29\sqrt{3}$ (D) 20 (E) $33\sqrt{3}$

5. Sea $n = 10 \cdots 064$ un número donde hay k ceros entre 1 y 6. Sea $N(k)$ el número de factores de 2 en la factoirzación de n. ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar $N(k)$?
(A) 7 (B) 64 (C) 2016 (D) 3 (E) 5

6. Un tetraedro sólido se extrae de un cubo sólido unitario de madera. Este tetraedro se obtiene cortando el cubo por un plano que pasa a través de dos vértices no adyacentes

en una cara y un vértice en la cara opuesta no adyacente a cualquiera de los dos primeros vértices. Extraido el tetraedro, la parte restante del cubo se coloca sobre una mesa con la superficie de corte hacia abajo. ¿Cuál es la altura de este objeto?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ (E) $\frac{2}{3}$

2. Sugerencias y hechos que ayudan

1. Analice las primeras potencias de 2016, pero no intente realizar toda la multiplicación. Recuerde que el problema pide solo analizar los dígitos de las decenas.

2. Desarrolle la igualdad que define la condición e intente factorizarla de tal forma que pueda aplicar alguna propiedad de los números.

3. Recuerde que un número de dos dígitos tiene la forma

$$n = a \cdot 10 + b,$$

donde $1 \leq a \leq 9$ y $0 \leq b \leq 9$. Note también que $|x - y| = \sqrt{(x - y)^2}$.

4. Identifique los posibles triángulos congruentes en la figura. Puede también ser útil en este tipo de problemas realizar construcciones geométricas que puedan ayudar establecer otras relaciones.

5. Exprese el número de forma tal que se pueda identificar potencias de primos. Recuerde el Teorema Fundamental de la Aritmética que afirma que todo número se puede descomponer en factores primos de forma única. Puede ayudar los conceptos de paridad.

6. Hecho el corte note que la altura buscada es parte de una de las diagonales del cubo, la diagonal que atraviesa la cara que genera el corte. Además observe que el volumen del tetraedro se puede calcular de diferentes formas.

3. Soluciones

1. ***Respuesta* (E)**. Veamos algunas potencias de 2016

n	2016^n
1	2016
2	4064256
3	8193540096
4	16518176833536
5	33300644496408576
6	67134099304759689216
7	135342344198395533459456
8	272850165903965395454263296
9	550065934462394237235794804736
10	1108932923876186782267362326347776

y sus dígitos de las unidades, y decenas

n	2016^n
1	16
2	56
3	96
4	36
5	76
6	16
7	56
8	96
9	36
10	76

Ahora observemos que la serie de números de los dígitos de las decenas se repiten en ciclos de 5 y que la suma de estos números es 25. De modo que, la suma de los los primeros 10 dígitos de las decenas es 50. Podemos concluir así que la suma de los dígitos de las decenas de los números de la serie hasta 2016^{2010} tiene como dígito de las unidades al 0. Luego, la suma hasta 2016^{2017} tiene como dígito de las unidades al 1.

2. ***Respuesta* (B)**. Podemos expresar la condición de igualdad como

$$p+\frac{1}{q}=17q+\frac{17}{p}$$

$$p^2q+p=17q^2p+17q$$

$$(pq-1)(p-17q)=0$$

Como p y q son enteros positivos $pq-1=0$ si y solo si $p=1$ y $q=1$, que no verifican la condición. En consecuencia, $p=17q$ implicando que hay 5 posibles pares de números que cumplen la condición.

3. ***Respuesta* (E)**. Sean a, b los dígitos de la media aritmética. Entonces,

$$\frac{x+y}{2}=10a+b$$

$$\sqrt{xy}=10b+a,$$

donde $1\leq a\leq 9$ y $0\leq b\leq 9$. Operando con las igualdades tenemos que

$$x+y=20a+2b$$

$$xy=100b^2+20ba+a^2$$

Elevando al cuadrado la primera igualdad y multiplicando por -4 la segunda, obtenemos que

$$x^2+2xy+y^2=400a^2+80ab+4b^2$$

$$-4xy=-400b^2-80ab-4a^2$$

Finalmente, sumando ambas igualdades, se tiene la siguiente expresión:

$$x^2 - 2xy + y^2 = 6^2 \cdot 11 \cdot (a^2 - b^2)$$

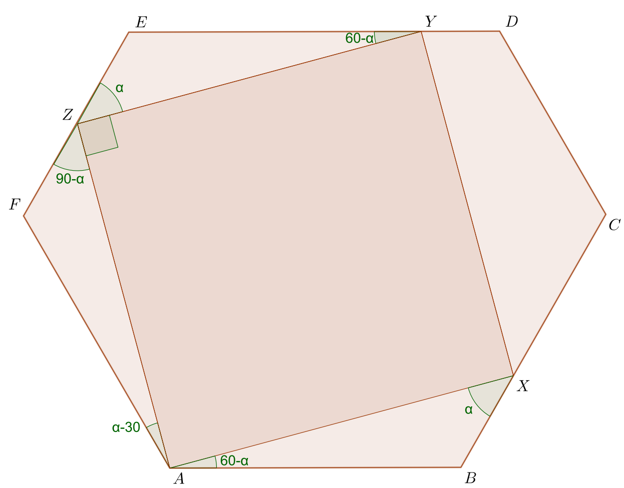
Recordemos además que $|x-y|^2 = (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ debe ser un cuadrado. Esto significa que el factor $a^2 - b^2$ debe ser divisible por 11 y como a, b son dígitos $a^2 - b^2$ solo puede ser 11 o 44.

En el primer caso, como 11 es primo, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 11$ impica que $a - b = 1$ y $a + b = 11$, de donde concluimos que $a = 6$ y $b = 5$.

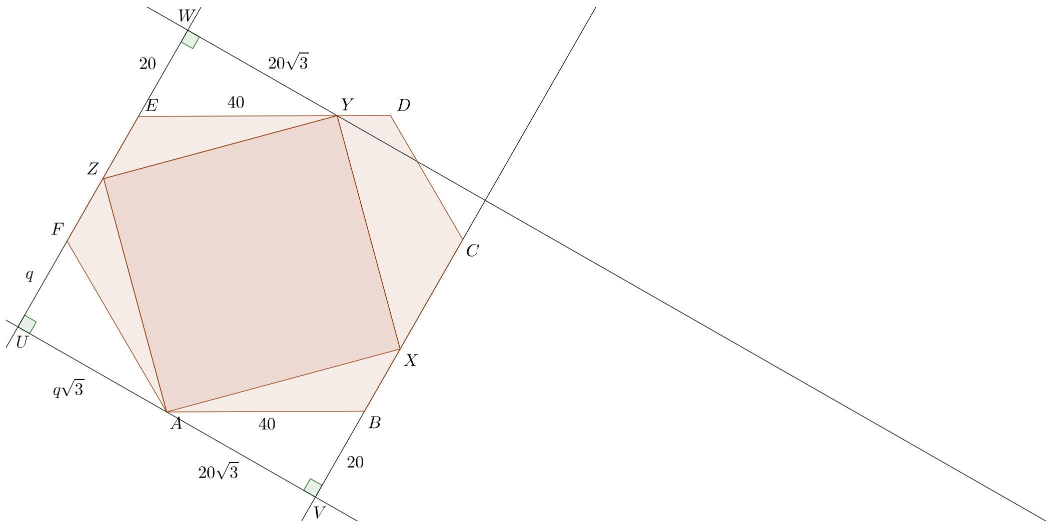
Para el segundo caso debemos considerar a su vez tres posibilidades. Si $a - b = 2$ y $a + b = 22$, entonces $a = 12$ y $b = 10$, que descartamos puesto que a y b son dígitos. Si $a - b = 4$ y $a + b = 11$, entonces $a = \frac{15}{2}$ y $b = \frac{7}{2}$, soluciones que también debemos descartar.

Concluimos de esta forma que $|x - y| = \sqrt{(x-y)^2} = 6 \cdot 11 = 66$.

4. ***Respuesta* (A)**. Observemos primeramente que los triángulos ABX y YEZ son congruentes. Para verlo sea $\alpha = \angle EZY$entonces $\angle FZA = 90 - \alpha$, $\angle FAZ = \alpha - 30$, $\angle BAX = 60 - \alpha$ y $\angle BXA = \alpha$. Por lo tanto $\angle EZY = \angle BXA$, $ZY = XA$ y $\angle EYZ = \angle BAX$, lo que significa que los triángulos ABX y YEZ son congruentes.



Consideremos sobre la recta que contiene al lado EF el punto U tal que el triángulo FUA es recto en U, sobre la recta que contiene al lado CB el punto V tal que el triángulo BVA es recto en V y sobre la recta que contiene al lado EF el punto W tal que el triángulo EWY es recto en W. Como en el triángulo EWY el ángulo $\angle WEY = 60$, entonces $EW = 20$ y $WY = 20\sqrt{3}$. Análogamente, $BV = 20$ y $AV = 20\sqrt{3}$. Sea ahora $FU = q$, por un razonamiento análogo a los anteriores $UA = q\sqrt{3}$, determinaremos q. Sea también $s = ZY$.

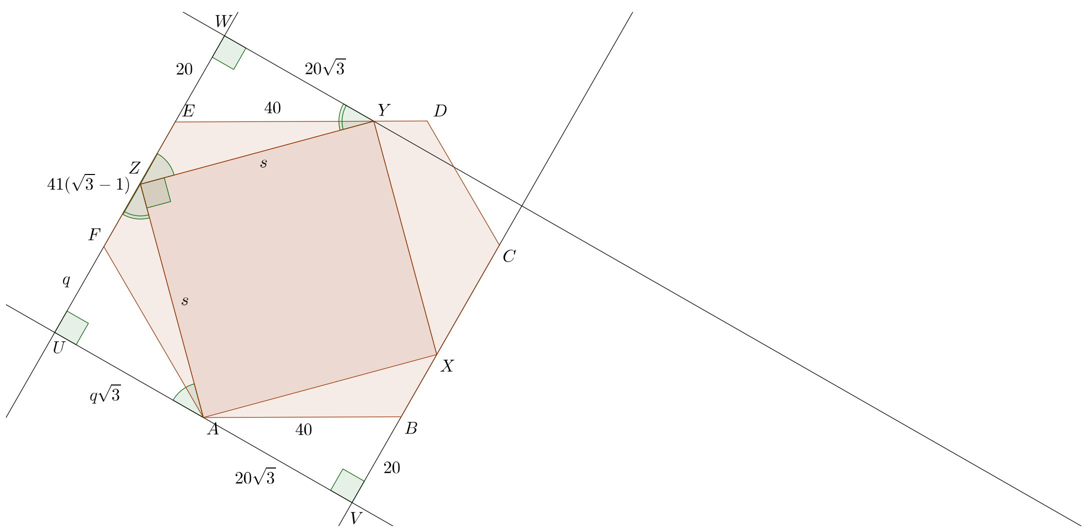


Los ángulos $\angle EZY$ y $\angle FZA$ son complementarios, entonces $\angle EZY = \angle UZA$ y así los triángulos UZA y WYZ son congruentes. De esta forma concluimos que $ZU = 20\sqrt{3}$ y $ZW = q\sqrt{3}$. Por tanto,

$$q\sqrt{3} + 20\sqrt{3} = q + 20 + 41\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

$$q\left(\sqrt{3} - 1\right) = 21\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

$$q = 21$$



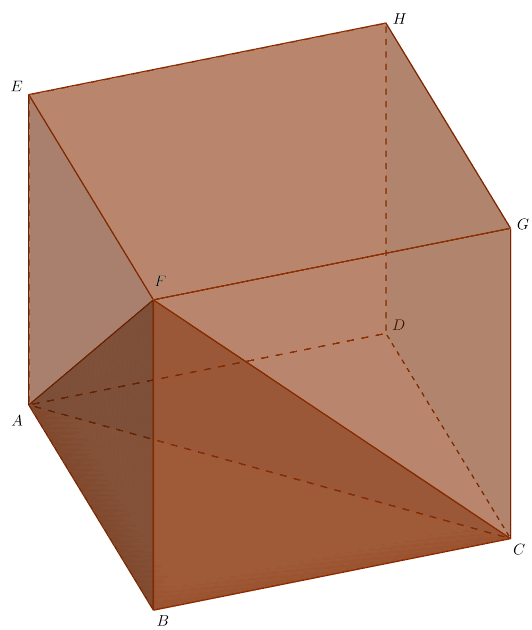
Luego, por Pitágoras $s = 29\sqrt{3}$.

5. ***Respuesta* (A)**.

Podemos escribir n como $10^{k+2} + 64 = 5^{k+2} \cdot 2^{k+2} + 2^6$. Para $k \leq 3$ podemos también escribir $n = 2^{k+2}(5^{k+2} + 2^{4-k})$. El factor entre paréntesis es impar, luego $k + 2 \leq 5$ y así $N(k) = 5$. Si $k > 4$, entonces $n = 2^6(5^{k+2} \cdot 2^{k-4} + 1)$ y en este caso $N(k) = 6$, pues el término entre paréntesis es impar.

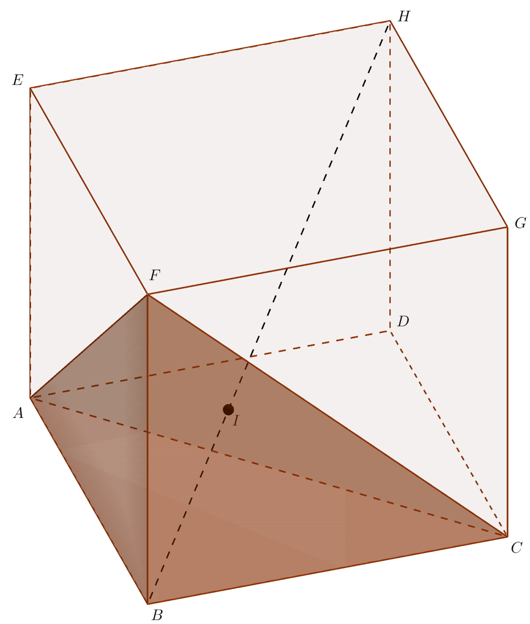
Veamos el caso $k = 4$. Tenemos $n = 2^6(5^6 + 1)$ y el factor entre paréntesis es par, esto significa que $N(4) \geq 7$. Veamos si $5^6 + 1$ es divisible por 4. Para eso analizaremos el resto de la división de este por 4. Primeramente, observemos que el resto de dividir 5 por 4 es 1 y lo mismo vale para las potencias de 5, luego el resto de dividir 5^6 por 4 es 1 y el de dividir $5^6 + 1$ por 4 sería 2. Esto demuestra que la mayor potencia de 2 que divide a $5^6 + 1$ es 2 y con esto $N(4) = 7$.

6. ***Respuesta* (B)**. Sea $ABCDEFGH$ el cubo unitario. Podemos ver en la figura el corte efectuado en el cubo unitario que genera el tetraedro $ABCF$ y tracemos el segmento BH que es evidentemente perpendicular a la cara ACF del tetraedro. Sea ahora I la intersección del segmento BH y la cara ACF. Deseamos encontrar entonces IH que es la altura del objeto luego de extraido el tetraedro y reposado el mismo sobre la mesa con esta cara ACF hacia abajo.



Para determinar IH consideremos primero $x = BI$. Para hallar x analicemos el volumen del tetraedro desde dos perspectivas. Considerando la cara ABC como la base y la altura BF el volumen del tetredro es $\frac{1}{3} \cdot BF \cdot \text{área}(ABC) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Por otro lado, tomando la cara ACF como la base y la altura $x = BI$ el volumen del tetraedro es $\frac{1}{3} \cdot x \cdot \text{área}(ACF)$. Ahora observemos que el triángulo ACF es quilátero, entonces área$(ACF) = \frac{(\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}$. De manera que el área del tetraedro también es $\frac{\sqrt{3}}{6}x$. Así que $\frac{\sqrt{3}}{6}x = \frac{1}{6}$ y luego $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Finalmente como $BH = \sqrt{3}$ se tiene que

$$IH = BH - x = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$



4. Clave de respuestas

1. (E)
2. (B)
3. (A)
4. (C)
5. (A)
6. (D)

Sociedad Boliviana
de Matemática

Olimpiada Paceña de Matemática
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Antiguo, Teléfono 2441578,
e-mail: olimpiadaOPM@gmail.com
http://www.opmat.org