Universidad Mayor de San Andrés

Facultad de Ciencias Puras y Naturales

Carrera de Matemática

“Problemas y Soluciones de Olimpiadas de Matemática” categoría β

Comité Académico

La Paz - Bolivia

2018

1. Introducción

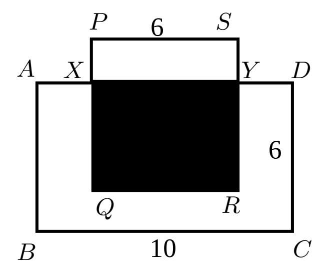
1.1. Categoría β

Problema 1. En el presente año, mi maestra dice que el producto de las edades de ella y de su padre es 2010. ¿En qué año nació mi maestra?

A) 1943; B) 2005; C) 1953; D) 1995; E) 1988.

R La respuesta correcta es la (E). 2010 se factoriza como $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Además se sabe que $67 > 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, el factor 67 debe ser parte de la edad del padre y es el único, porque edades de 134 años o mayores no son realistas. Por lo tanto la edad de la maestra es 30 años y nació en 1988.

Problema 2. En la figura, $ABCD$ es un rectángulo y $PQRS$ es un cuadrado. El área sombreada es la mitad del área del rectángulo $ABCD$. ¿Cuál es la longitud de PX?



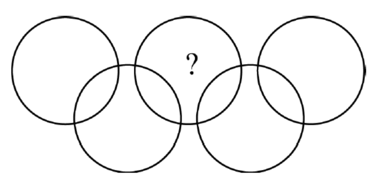
A) 2; D) 2,5;

B) 4;

C) 1; E) 1,5.

R La respuesta correcta es la (C). El área de $ABCD$ es $6 \times 10 = 60$, por lo tanto el área de $XQRY$ es 30, y como $XY = PS = 6$ resulta $XQ = 5$, de donde $PX = 6 - 5 = 1$.

Problema 3. En la figura hay nueve regiones dentro de los círculos. Los números del 1 al 9 se colocan, uno en cada región, de tal manera que la suma de los números dentro de cualquier círculo sea 11.



¿Qué número va en la región señalada con el signo de interrogación?

A) 6; B) 5; C) 9; D) 7; E) 8.

R La respuesta correcta es la (A). Consideremos con x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 y x_9 los números de las nueve regiones (Ver Figura 1). Sumando los números $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9 = 45$. Luego como la suma de los números dentro de cualquier circulo es 11, tenemos $x_1+x_2 = 11$, $x_2+x_3+x_4 = 11$, $x_4+x_5+x_6 = 11$, $x_6+x_7+x_8 = 11$, $x_8+x_9 = 11$. Estas ultimas cinco ecuaciones sumando $x_1+2x_2+x_3+2x_4+x_5+2x_6+x_7+2x_8+x_9 = 55$ y sustituyendo la primera ecuación en la anterior tenemos $x_2+x_4+x_6+x_8 = 55-45 = 10$.

Por lo tanto la suma de los números en las intersecciones es 10, lo cual implica que esos números deben ser 1, 2, 3 y 4 (en algún orden). El 9 debe ir en un extremo, de lo contrario al sumarle dos números en las regiones intersectadas por un círculo (tres regiones tiene un circulo) pasaría de 11. Supongamos entonces que la secuencia de números de izquierda a derecha comienza con $x_1 = 9$, luego se obtendría $x_2 = 2$. El 8 debe ir a continuación, es decir $x_3 = 8$ o en el extremo derecho $x_9 = 8$. La primera posibilidad se descarta, pues el 3 y 4 estarían dentro de un mismo círculo y se repetiría el 4 para obtener el 11. La segunda posibilidad con $x_9 = 8$, luego se obtendría $x_8 = 3$. Sin embargo si reemplazamos x_2 y x_8 en $x_2 + x_4 + x_6 + x_8 = 10$, obtenemos $x_4 + x_6 = 5$. Este ultimo resultado sustituimos a $x_4 + x_5 + x_6 = 11$, llegamos $x_5 = 6$, lo que significa el signo de interrogación señala el número 6.

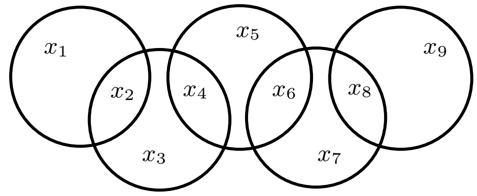


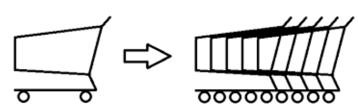
Figura 1:

Problema 4. Los números del 1 al 10 se escriben en una pizarra. Los estudiantes en clase juegan el siguiente juego: un estudiante borra dos números y escribe en la pizarra la suma de ambos disminuida en 1; luego otro estudiante borra dos números y escribe en la pizarra la suma de ambos disminuida en 1, y así sucesivamente. El juego continúa hasta que queda un único número en la pizarra. El número que queda es:

A) mayor que 46;
B) 46;
C) 11;
D) menor que 11;
E) otra respuesta.

R La respuesta correcta es la (B). La suma de los números en la pizarra disminuye en una unidad en cada jugada. Inicialmente la suma es 55. Luego de 9 jugadas queda un solo número que debe ser $55 - 9 = 46$.

Problema 5. En un supermercado hay dos filas de carritos encajados. La primera fila tiene 10 carritos y mide 2,9 m de largo. La segunda fila tiene 20 carritos y mide 4,9 m de largo. ¿Cuál es la longitud de cada carrito?



A) 0,8 m;
B) 1,2 m;
C) 1 m;
D) 1,1 m;
E) 1,4 m.

R La respuesta correcta es la (D). Si c es la longitud de un carrito y s la parte que sobresale al encajar un carrito en otro, se tiene $c + 9s = 2,9$ y $c + 19s = 4,9$. Sustraendo la primera igualdad de la segunda resulta $10s = 2$ y $s = 0,2$ de donde $c = 2,9 - 9s = 2,9 - 1,8 = 1,1m$.