Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática

"Problemas y Soluciones de Olimpiadas de Matemática" categoría γ

Comité Académico

La Paz - Bolivia
2018

1. Introducción

1.1. Categoría γ

Problema 1. Dado un rectángulo $A_1A_2A_3A_4$ y un punto P dentro de éste sabemos que $PA_1 = 4$, $PA_2 = 3$ y $PA_3 = \sqrt{10}$. ¿Cuál es la longitud de PA_4?

A) 12; B) 8; C) 7; D) $\sqrt{17}$; E) 9.

Solución

Trazamos el segmento QR paralela a A_4A_3 tal como se muestra en la figura (1). Hallando el cateto b de los triángulos $\triangle A_1PQ$, $\triangle A_2PR$ y por el teorema de Pitágoras se tiene:

$$\begin{aligned} b^2 &= (A_1P)^2 - (PQ)^2 \\ b^2 &= (A_2P)^2 - (PR)^2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

De manera similar obtenemos el cateto c de los triángulos $\triangle A_4PQ$ y $\triangle A_3PR$

$$\begin{aligned} c^2 &= (A_4P)^2 - (PQ)^2 \\ c^2 &= (A_3P)^2 - (PR)^2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

De (1.1) y (1.2) tenemos que:

$$\begin{aligned} (A_1P)^2 - (PQ)^2 &= (A_2P)^2 - (PR)^2 \\ (A_4P)^2 - (PQ)^2 &= (A_3P)^2 - (PR)^2 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Resolviendo, despejando A_4P y reemplazando los datos tenemos:

$$\begin{aligned} A_4P &= \sqrt{(A_3P)^2 + (A_1P)^2 - (A_2P)^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{10})^2 + 4^2 - 3^2} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

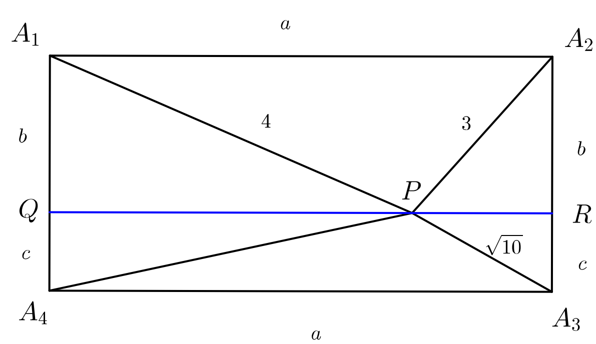
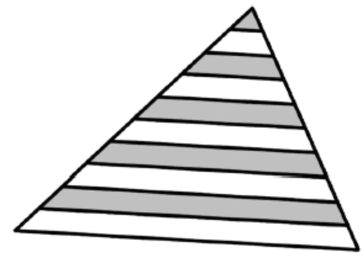


Figura 1:

Problema 2. Las líneas paralelas a la base del triángulo dividen a cada uno de los otros dos lados en 10 segmentos iguales. ¿Qué porcentaje del area del triángulo es gris?



A) $42,5\,\%$; B) $45\,\%$; C) $46\,\%$; D) $47,5\,\%$; E) $50\,\%$.

Solución. La respuesta correcta es la (B). Si por los extremos de cada segmento (de los trazados paralelos a la base) se trazan paralelas al lado que pasa por el extremo opuesto, el triángulo queda dividido en 100 triangulitos congruentes con el triangulito gris superior. Es fácil ver que la cantidad de estos triangulitos en cada franja paralela a la base, de arriba hacia abajo, son los números impares desde el 1 hasta el 19. Por lo tanto el área gris contiene $1+5+9+13+17 = 45$ triangulitos, y su área es el $45\,\%$ del área del triángulo.

Problema 3. ¿Para cuantos enteros $n (1 \leq n \leq 100)$ el numero n^n es un cuadrado perfecto?

A) 55; B) 50; C) 54; D) 5; E) 15.

Solución. n^n es un cuadrado perfecto si n lo es o si n es par. Como del 1 al 100 hay 50 números pares y 5 impares que son cuadrados perfectos (1, 9, 25, 49 y 81), hay en total 55 valores de n que cumplen la condición y la respuesta correcta es la (A).

Problema 4. Cada uno de los amigos de Basilio sumó el número del día y el número del mes de su cumpleaños y el resultado fue 35. Si todos cumplen años en fechas diferentes, ¿cuál es el número máximo posible de amigos que tiene Basilio?

A) 12; B) 8; C) 7; D) 10; E) 9.

Solución. La respuesta correcta es la (E). Para que los amigos de Basilio sean muchos, sus fechas de cumpleaños deben estar compuestas por números pequeños, como $1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 2/2, \ldots$ dado que $1+1+1+2+2+1+1+3+2+2+3+1+1+4+2+3+3+2 = 35$, Basilio a lo sumo puede tener 9 amigos.

Problema 5. ¿Cuántos triángulos rectángulos con un cateto y la hipotenusa enteros hay?, sabiendo que el otro cateto es igual a $\sqrt{1988}$.

A) 2; C) 4; E) 6.

B) 3; D) 5;

Solución La respuesta correcta es la (A). Sea m la longitud de la hipotenusa y n la del otro cateto, se tiene entonces la siguiente ecuación: $n^2 + 1988 = m^2$ de aquí se deduce que:

$1988 = (m+n)(m-n)$. Estos dos factores tienen la misma paridad y como el producto es par, los dos tienen que ser pares y como $1998 = 2^2 \cdot 7 \cdot 71$, las únicas posibilidades para los factores pares son 2 y $2 \cdot 7 \cdot 71$. ó $2 \cdot 7$ y $2 \cdot 71$.

$$\begin{cases} m+n = 2 \\ m-n = 2 \cdot 7 \cdot 71 = 994 \end{cases} \qquad \begin{cases} m+n = 2 \cdot 7 = 14 \\ m-n = 2 \cdot 71 = 142 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m+n = 2 \cdot 7 \cdot 71 = 994 \\ m-n = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m+n = 2 \cdot 71 = 142 \\ m-n = 2 \cdot 7 = 14 \end{cases}$$

Cada una de estas opciones genera una solución: $(m = 498, n = -496)$ ó $(m = 78, n = -64)$ o $(m = 498, n = 496)$ ó $(m = 78, n = 64)$. Descartando las soluciones negativas nos quedamos con $(m = 498, n = 496)$ ó $(m = 78, n = 64)$.