$13^{\underline{a}}$ Olimpíada Paceña de Matemática

Proyecto de Interacción Social de la Carrera de Matemática

Categoría α

Fase Final

27 de mayo de 2018

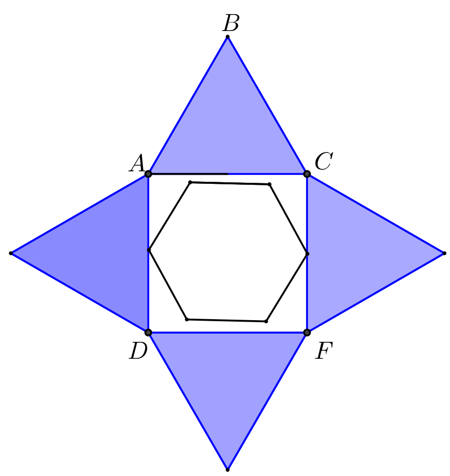
Instrucciones

1. Esta prueba tiene una duración mínima de 1 hora; y una duración máxima de 1 hora y 30 minutos.
2. Esta es una prueba de 4 problemas de desarrollo. La prueba puede ser realizada con lápiz o con bolígrafo.
3. Te hemos proporcionado 4 hojas: 1 hoja de preguntas y 3 hojas blancas de desarrollo.
4. En las hojas blancas, debes desarrollar las respuestas a los problemas de la manera más completa y clara posible.
5. En la revisión serán consideradas todas las ideas que presentes. Intenta resolver el mayor número posible de preguntas. Respuestas sin justificación no serán consideradas en la revisión.
6. No está permitido el uso de celulares, tablets o cualquier otro dispositivo electrónico.
7. No está permitido el uso de calculadoras, apuntes, libros o cualquier otra fuente de información.
8. Al finalizar la prueba entregarás solamente el folleto con el desarrollo de tus respuestas. Puedes llevarte el resto de hojas que te hemos proporcionado.

CARRERA DE MATEMÁTICA

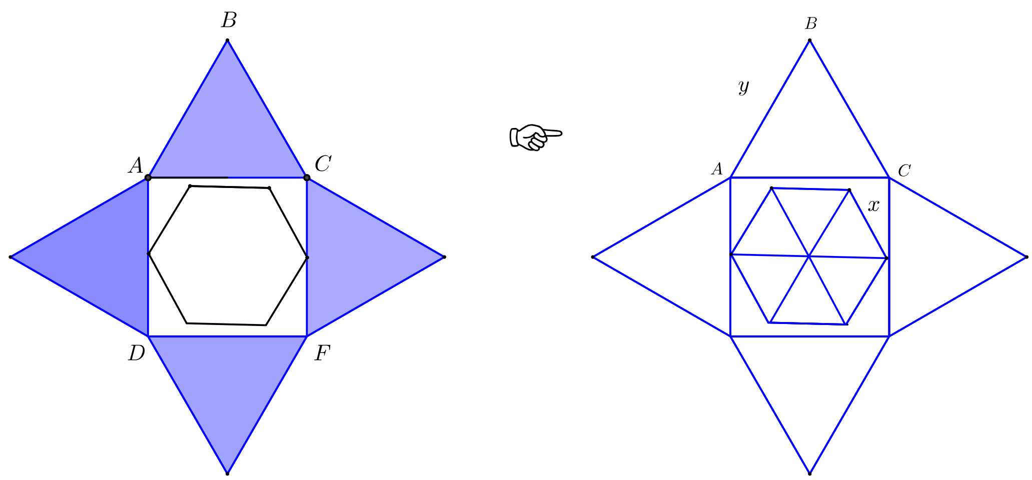
IIMAT

Problema 1. En la siguiente figura se observa un cuadrado $\square ACFD$, un triángulo equilátero ΔABC y un hexágono regular. Si el triángulo ΔABC y el hexágono tienen el mismo perímetro igual a $6m$. ¿Cuál es el área de la parte sombreada de la figura?.



Solución. Sea y la longitud de uno de los lados del triángulo ΔABC y sea x la longitud de uno de los lados del hexágono. Como el triángulo ΔABC y el hexágono tienen el mismo perímetro igual a $6m$, entonces $3y = 6x = 6$ lo que implica $x = 1$ y $y = 2$. Luego por el teorema de Herón, el Área del triángulo ΔABC es:

$$A_{ABC} = \sqrt{3(3-2)(3-2)(3-2)}$$



Por lo tanto el área de la parte sombreada es: $\mathbf{A} = 4\sqrt{3}$.

Problema 2. José llama a un número natural mayor que 100 aditivo, cuando el dígito de las unidades es igual a la suma de los demás dígitos, por ejemplo 336 es aditivo, pués $3 + 3 = 6$.

- (a) Escriba el número aditivo de 3 dígitos tal que el dígito de las unidades es 1.
- (b) Escriba todo los números aditivos de 3 dígitos tal que el dígito de las unidades es 8.
- (c) ¿ Cuál es el mayor número aditivo sin dígitos repetidos ?.

Solución.

- (a) Como el dígito de las unidades es 1, entonces para que tal número sea aditivo, la suma de los dígitos de las decenas y centenas deben ser igual a 1. Existe solo un número con tres dígitos con esas propiedades el cual es 101.
- (b) Para que un número aditivo de tres dígitos termine en 8, la suma de los dígitos de las decenas y de las centenas debe ser igual a 8. Como un tal número no puede tener 0 en la centenas (los números aditivos son mayores a 100), entonces las únicas posibilidades son los números $178, 268, 358, 448, 538, 628, 718, 808$.
- (c) Para tener el mayor número aditivo debemos tener 9 en la posición de las unidades. En la posición de las decenas podemos colocar el dígito 0, a fin de aumentar la cantidad de dígitos del número que estamos buscando, por el mismo motivo, en la posición de las centenas

podemos colocar el dígito 1 (no queremos dígitos repetidos), luego en la posición de unidad de mil podemos colocar el dígito 2. Para la posición de las decenas de mil podemos colocar los siguientes dígitos todavía no utilizados: $3, 4, 5, 6, 7$ o 8. Pero, los dígitos 7 o 8 están excluidos pués 72109 y 82109 no son aditivos. restan cuatro posibilidades: $32109, 42109, 52109$ y 62109. Luego para la posición de las centenas de mil, ninguna de las tres primeras posibilidades puede ocurrir, ya que el dígito que puede ser colocado en la posición de las centenas de mil es $3, 2, 1$ respectivamente, pero estos dígitos ya fueron utilizados (el número aditivo no admite dígitos repetidos). Por lo tanto la única posibilidad que queda es el número **62109**.

Problema 3. Cuántos números enteros y positivos de 5 dígitos tiene la propiedad de que el producto de sus dígitos es 2744.

Solución. Factorizando el número 2744 tenemos:

$$\begin{array}{r|l} 2744 & 2 \\ 1372 & 2 \\ 686 & 2 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Asi, el número 2744 se puede escribir de la siguiente forma, $2744 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$, el cual tiene siete factores pero nosotros queremos solo de cinco factores por lo tanto $2 \cdot 2$ la podemos reducir a un sólo factor $2 \cdot 2 = 4$, mientras que los factores $7 \cdot 7 = 49$ y $7 \cdot 2 = 14$ no generan números de un solo factor, entonces uno de los posibles números de 5 dígitos tales que su producto sea 2744 serían:

7	7	7	2	4

7	7	7	4	2

7	7	2	7	4

$$\vdots$$

Entonces se observa que esto es equivalente a acomodar el número 2 y el número 4 en diferentes casillas tal como se muestra a continuación:

			2	4

			4	2

		2		4

$$\vdots$$

y esto a su vez es equivalente a acomodar el número 2 en cualquiera de las cinco casillas esto es:

			2	

				2

		2		

$$\vdots$$

Por lo tanto el número 2 se puede acomodar de cinco maneras diferentes en tales casillas, una vez elegido el lugar para el número 2, el número 4 se puede acomodar en las restantes cuatro casillas, asi por cada posición que se elija para el número 2 (que son cinco) se puede elegir cuatro posiciones para el número 4, lo que hace un total de $5 \cdot 4 = 20$ números de 5 dígitos tales que su producto sea 2744.

Analizando de forma análoga al anterior caso, tenemos la segunda posibilidad.

7	7	7	8	1

Entonces también existen $5 \cdot 4 = 20$ números de 5 dígitos tales que su producto sea 2744. Por lo tanto por primer y segundo caso, el total de los casos es **20+20=40** números de 5 dígitos tales que su producto sea 2744.

Problema 4. Cuál es la suma de los dígitos del número que se obtiene al calcular $2^{2018} \cdot 5^{2020}$

Solución.

$$2^{2018} \cdot 5^{2020} = 2^{2018} \cdot 5^{2018} \cdot 5^2 = (2 \cdot 5)^{2018} 5^2 = 25 \cdot 10^{2018}$$

Luego la suma de sus dígitos es **2+5=7**.

Carrera de Matemática
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2612909-2612908-2610943,
e-mail: `olimpiadaOPM@gmail.com`
`http://www.opmat.org`