$13^{\underline{a}}$ Olimpíada Paceña de Matemática

Proyecto de Interacción Social de la Carrera de Matemática

Categoría α

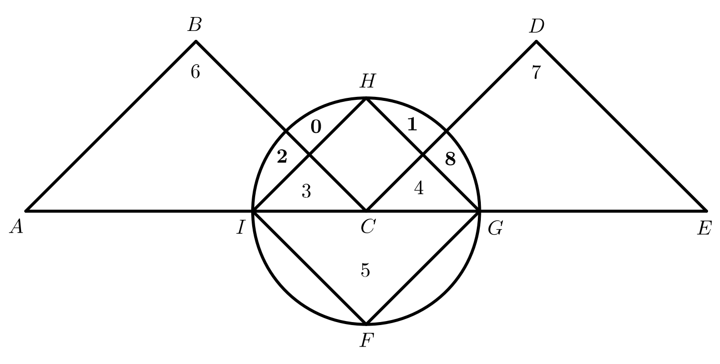
Segunda Fase

13 de mayo de 2018

Instrucciones

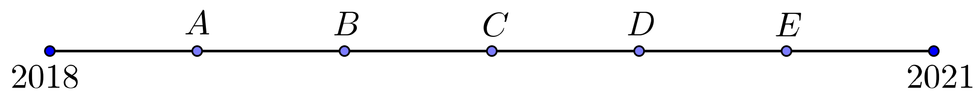
1. Esta prueba tiene una duración mínima de 45 minutos y una duración máxima de 1 hora.
2. No está permitido el uso de celulares, tablets o cualquier otro dispositivo electrónico.
3. No está permitido el uso de calculadoras, apuntes, libros o cualquier otra fuente de consulta.
4. Te hemos proporcionado 5 hojas: 2 de preguntas, 1 de respuestas y 2 para operaciones auxiliares.
5. Esta es una prueba con 8 problemas, 4 son de selección múltiple y 4 son de respuesta corta.
6. En los problemas de selección múltiple, marca la alternativa que encuentres correcta en la hoja de respuestas, marcando todo el espacio dentro del círculo correspondiente. (A) ● (C) (D) (E)
7. En los problemas de respuesta corta, escribe la respuesta que encuentres correcta en la hoja de respuestas.
8. Atención: Si marcas o escribes más de una respuesta, perderás los puntos de la pregunta.
9. Al finalizar la prueba entregarás solamente tu hoja de respuestas. Puedes llevarte el resto de hojas que te hemos proporcionado.

Problema 1. Observe la siguiente figura. ¿ Cual es la suma de los números que están dentro de los triángulos (ΔABC y ΔCDE) y dentro del círculo, pero fuera del cuadrado $\square IFGH$?



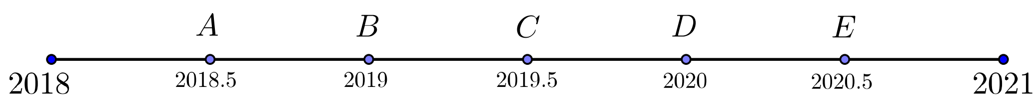
Solución. Los números que están dentro del los triángulos son: $6, 2, 3, 4, 8, 7$ y los que están dentro del círculo son: $2, 0, 1, 8, 3, 4, 5$. Entonces los números que están dentro de los triángulos y dentro del círculo es: $2, 3, 4, 8$.Finalmente los números que estan fuera del cuadrado es 2 y 8. Por lo tanto su suma es **2+8=10**.

Problema 2. José divide un segmento de recta en seis partes iguales. El observa que los puntos de los extremos del segmento corresponden a las marcas de 2018 cm y 2021 cm tal como se muestra en la siguiente gráfica.



¿Cuál de los puntos corresponde a la marca 2019 cm?

Solución. El tamaño del segmento es $2021 - 2018 = 3$ cm, como este segmento fue dividido en seis partes, entonces cada parte mide $\dfrac{3}{6} = 0.5$ cm. Luego a partir de 2018 cm sumamos 0.5 cm tal como se muestra en la siguiente gráfica.



Por lo tanto Concluimos que 2019 cm corresponde al punto **B**.

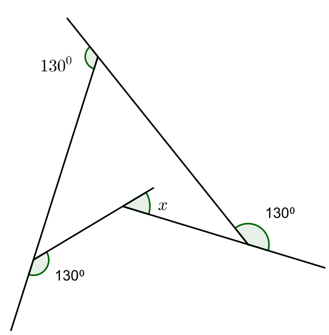
Problema 3. Dados los números $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. ¿Cuántos enteros positivos de dos dígitos hay tal que el dígito de las decenas es mayor que el dígito de las unidades?.

Solución. Se puede escoger nueve posibles dígitos para el dígito de las unidades: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$; el 9 no se puede escoger como dígito de las unidades ya que el dígito de las decenas debe ser mayor y no hay dígitos mayores que 9 en la base decimal. Si escogemos un dígito d entre cero y ocho para las unidades, podemos escoger $9 - d$ dígitos para las decenas. Por lo tanto si el dígito de las unidades es 0 podemos escoger 9 posibles dígitos para el decenas, si el dígito de las unidades fuese 1 podríamos escoger 8 y así sucesivamente. Por lo tanto hay $\mathbf{9 + 8 + \cdots + 1 = 45}$ enteros positivos de dos dígitos con el dígito de las decenas mayor que el de las unidades.

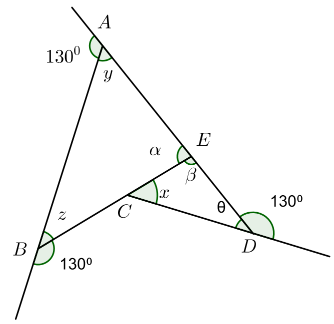
Problema 4. Halle el valor de n: $\quad 9^n + 9^n + 9^n = 3^{2015}$.

Solución. Como $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2n} + 3^{2n} + 3^{2n} = 3 \cdot 3^{2n} = 3^{2n+1}$, tenemos $3^{2n+1} = 3^{2015}$. Por lo tanto, $2n + 1 = 2015$, luego $\mathbf{n = 1007}$.

Problema 5. Encuentra el valor del ángulo x en la siguiente Figura.

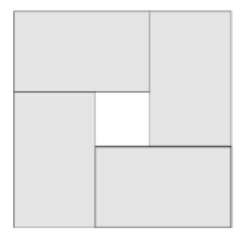


Solución. Consideremos la siguiente figura geométrica



Se observa que $130 + y = 180$ de aquí que $y = 50$ de manera similar $z = 50$ y $\theta = 50$ por lo tanto, como la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180, entonces observando el triángulo ΔABE tenemos $\alpha = 80$, luego $\beta = 100$. Finalmente del triángulo ΔCED se obtiene lo deseado **x=30**.

Problema 6. En la Figura se muestran cuatro rectángulos iguales dibujados dentro de un cuadrado. Si el perímetro de cada rectángulo mide 16cm. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado original?



Solución. Llamemos a a la longitud del lado mayor de cada rectángulo y b a la longitud del lado menor. Como el perímetro de cada rectángulo es 16, tenemos que $2(a + b) = 16$. El contorno del cuadrado tiene perímetro igual a $\mathbf{4(a + b) = 32}$

Problema 7. Cuál es la suma de los dígitos del número

$$1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{2017} + 10^{2018}$$

Solución. Como $1 + 10 = 11$ entonces la suma de sus digitos es $1 + 1 = 2$
Como $1 + 10 + 10^2 = 11 + 100 = 111$ entonces la suma de sus digitos es $1 + 1 + 1 = 3$
Como $1 + 10 + 10^2 + 10^3 = 111 + 1000 = 1111$ entonces la suma de sus digitos es $1 + 1 + 1 + 1 = 4$
Haciendo de forma análoga para los demás sumandos, tenemos:

$$1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{2017} + 10^{2018} = 1111\ldots1 \tag{1}$$

El cual da como resultado 2019 dígitos de 1. Por lo tanto la suma de sus dígitos es

$$1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = \mathbf{2019}$$

Problema 8. La suma de tres números enteros positivos distintos es 7. ¿Cuál es el producto de estos tres enteros?

Solución. Los únicos tres enteros positivos distintos cuya suma da 7 son 1, 2 y 4. Por tanto, $\mathbf{1 \times 2 \times 4 = 8}$