Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
CARRERA DE MATEMÁTICA
14^a OPMat- Proyecto Interacción Social

Categoría β "beta" 3^{ro} y 4^{to} de Secundaria

Prueba Fase Final

HOJAS DE PREGUNTAS Y RESPUESTAS

Domingo 18 de noviembre de 2018 La Paz, Bolivia.

Instructivo

1. Tiempo de duración de la prueba: mínimo 60 minutos y máximo 90 minutos.
2. No se puede usar dispositivos electrónicos, incluyendo el celular. No se pueden consultar textos o apuntes.
3. Entregar el **desarrollo de las soluciones** a los problemas en las hojas adicionales en blanco proporcionadas.

PROBLEMA 1. *Sean a, b y c tres números enteros tales que $a > b > c > 0$. Pruebe que si $a+b$ es múltiplo de c, $b+c$ es múltiplo de a y $a+c$ es múltiplo de b, entonces el cociente $\frac{abc}{a+b+c}$ es un cuadrado perfecto.*

SOLUCIÓN.- Sabiendo que $b+c$ es múltiplo de a, existe un entero positivo k tal que $b+c = ka$. Por la condición de que $a > b > c$, tenemos $b+c = a$. Luego $a+c = b+2c$ y como b es divisor de $a+c$, entonces esto implica que b es divisor de $2c$, es decir que existe un entero positivo m tal que $2c = mb$. Nuevamente, ésta última igualdad junto con la hipótesis $b > c$ nos dice que $b = 2c$. Por tanto $a = b + c = 3c$. Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{a \cdot b \cdot c}{a+b+c} &= \frac{3c \cdot 2c \cdot c}{3c+2c+c} \\ &= \frac{6c^3}{6c} \\ &= c^2.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta: } c^2\texttt{, es un cuadrado perfecto}}$

■

PROBLEMA 2. *En la Figura 1 se observa que hay cuatro triángulos equiláteros que son BCD, DEF, FGH y HAB. También hay un rectángulo grande que esta dividido en 9 rectángulos pequeños. En la parte interior de algunos rectángulos esta escrito su perímetro y el área del triángulo equilátero BCD que es $\sqrt{3} \cdot 16$. ¿Cuál es el perímetro del polígono $ABCDEFGH$?.*

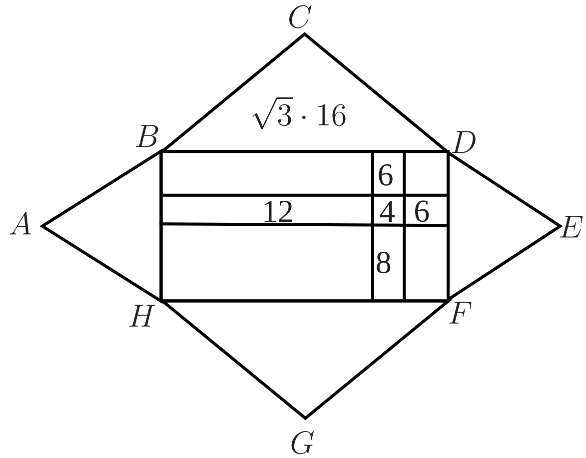
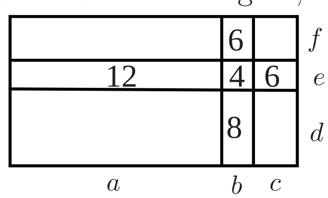


Figura 1

SOLUCIÓN.- Primeramente observemos el triángulo equilátero BCD, llamemos $x = BD$ la longitud de uno de los lados del triángulo BCD, entonces el área de este triángulo esta dado por $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \sqrt{3}\cdot 16$ de donde se obtiene $x = 8 = BD$.
Ahora determinemos el perímetro del rectángulo $BDFH$. Sean a, b, c, d, e y f las longitudes de los segmentos en que se han dividido los lados del rectángulo, como muestra la figura



De los perímetros conocidos tenemos:

$$\begin{aligned} a + e &= 6 \\ b + e &= 2 \\ c + e &= 3 \\ d + b &= 4 \\ f + b &= 3 \end{aligned}$$

luego sumando tenemos: $a + b + c + d + e + f + 2b + 2e = 18$. Así:

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e + f &= 18 - 2(b + e) \\ &= 18 - 4 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el perímetro del rectángulo $BDFH$ es 28. Como la longitud de un lado del rectángulo es $BD = 8$, entonces el otro lado es $DF = 6$. Del hecho que se tiene triángulo equiláteros podemos concluir que el perímetro del polígono $ABCDEFGH$ es $8 \cdot 4 + 6 \cdot 4 = 56$

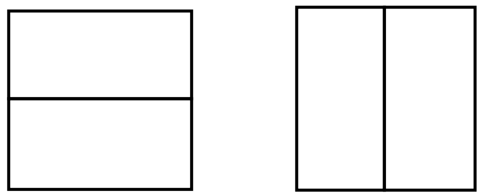
$$\boxed{\text{Respuesta: } 56}$$

■

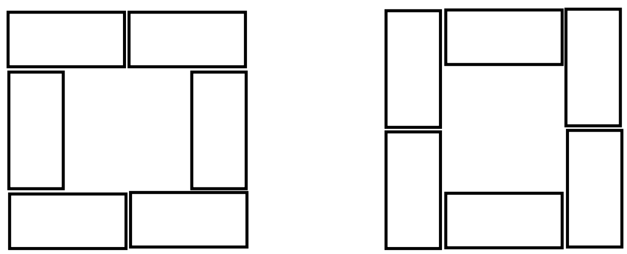
PROBLEMA 3. *¿De cuántas formas distintas se puede llenar una cuadricula* 4×4 *con fichas de* 2×1*?*

SOLUCIÓN.- Analicemos de la siguiente manera:

(A): Primero fijemos la parte central del la cuadrícula 4×4 que sería una cuadrícula 2×2, de cuantas formas hay para llenar esta cuadrícula con fichas 2×1, mostramos en la siguiente figura.

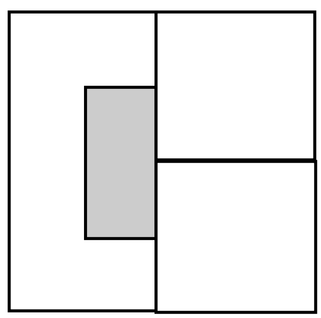


Para cualquiera de estas formas hay 2 maneras de terminar el llenado de la cuadrícula que es:



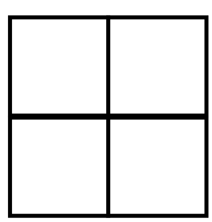
Luego hay 4 maneras de llenar la cuadrícula en este caso.

(B): Ahora si iniciamos el llenado inicial con una sola ficha 2×1 como en la figura siguiente:



Como podemos observar en la parte derecha de la figura los cuadrados de 2×2 de la parte superior como inferior se puede llenar cada uno de 2 maneras distintas, en el lado izquierdo se llena de manera forzada, luego hay 4 maneras de llenar en este caso. Hay cuatro casos, si giramos la ficha central 2×1 de la anterior figura, por cada giro hay 4 formas de llenar la cuadrícula. Luego en total hay 16 maneras de llenar la cuadrícula

(C): Por último no fijamos ficha central, dividimos la cuadrícula en 4 cuadrados 2×2



Cada uno de estos cuadrados 2×2 se puede llenar de 2 maneras y entonces en este caso hay 16 maneras de llenar la cuadrícula.

Haciendo la suma de las formas de llenar la cuadrícula en los incisos (A), (B) y (C), hay en total 36 formas de llenar la cuadrícula.

$\boxed{\text{Respuesta: } 36}$

$\blacksquare$

PROBLEMA 4. *Resolver la ecuación:*

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x-1} = \frac{1}{2}$$

SOLUCIÓN.- Si en $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x-1} = \frac{1}{2}$ reemplazamos $a = \sqrt[3]{x}$ y $b = \sqrt[3]{x-1}$ la ecuación se convierte en $a - b = \frac{1}{2}$, y $x = a^3$, $x = b^3 + 1$ así $a^3 - b^3 = 1$. De la siguiente identidad:

$$\begin{aligned}
(a-b)^3 =& a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
(\frac{1}{2})^3 =& a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \\
\frac{1}{8} =& 1 - 3ab\frac{1}{2} \\
-\frac{7}{8} =& -\frac{3}{2}ab \\
ab =& \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

De $a - b = \frac{1}{2}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
a^2 - ab =& \frac{1}{2}a \\
a^2 - \frac{7}{12} =& \frac{1}{2}a \\
a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{7}{12} =& 0 \\
12a^2 - 6a - 7 =& 0
\end{aligned}$$

De aquí su solución es $a = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(12)(-7)}}{24}$ y como $x = a^3$, se obtiene $x = \frac{36 \pm 5\sqrt{93}}{72}$

$$\boxed{\text{Respuesta: } x = \frac{36 \pm 5\sqrt{93}}{72}}$$

$\blacksquare$