14^a Olimpíada Paceña de Matemática

Un proyecto de interacción social de la Carrera de Matemática,
Facultad de Ciencias Puras y Naturales,
Universidad Mayor de San Andrés.

Primera Fase

Prueba de Clasificación

Categoría γ "gamma" 5^{to} y 6^{to} de Secundaria

HOJAS DE PREGUNTAS Y RESPUESTAS

Domingo 23 de septiembre de 2018 La Paz, Bolivia.

Instrucciones

1. La prueba tiene una duración mínima de 1 hora y una duración máxima de 1 hora y 30 minutos.
2. Por favor apaga tu celular mientras dure la prueba.
3. No está permitido: utilizar calculadoras, consultar apuntes o libros.
4. Te hemos proporcionado 5 hojas: 2 de preguntas, 1 de respuestas y 2 para operaciones auxiliares.
5. Esta es una prueba de 8 problemas de selección múltiple.
6. En la hoja de respuestas, marca sólo la alternativa que encuentres correcta.
7. Al finalizar la prueba, entregarás solamente tu hoja de respuestas. Puedes llevarte las demás hojas que te entregamos.

PROBLEMA 1. *¿Cuántos números pares de 3 cifras existen?*

(A) 150 (B) 250 (C) 350 (D) 450 (E) 550

SOLUCIÓN.- Sea abc un número de tres cifras

a	b	c
1	0	0
2	1	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9	9	8

Para colocar un dígito en a tenemos 9 posibilidades del 1 al 9 descontando al 0. Podemos colocar en el dígito b cualquier número del 0 al 9, por tanto para colocar un dígito en b tenemos 10 posibilidades, por último como el número abc es par solo tenemos 5 posibilidades para colocar en c y estos son $0, 2, 4, 6, 8$.
Por tanto, el total de números pares de 3 cifras es: $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$.

$\boxed{\text{Respuesta: 450 (Opción: D.)}}$

■

PROBLEMA 2. *La población de un cierto estado es* $5/8$ *urbana y* $3/8$ *rural. Si* $1/4$ *de la urbana y* $1/6$ *de la rural es menor de* 18 *años, ¿qué fracción de la población del estado es menor de* 18 *años?*

(A) $\dfrac{8}{42}$ (B) $\dfrac{7}{32}$ (C) $\dfrac{6}{52}$ (D) $\dfrac{4}{62}$ (E) $\dfrac{5}{17}$

SOLUCIÓN.- Sea n la población total. Entonces,
La población urbana es: $\dfrac{5}{8}n$.
La población urbana menor de 18 años: $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{5}{8}n = \dfrac{5}{32}n$
La rural es: $\dfrac{3}{8}n$
La rural menor de 18 es: $\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3}{8}n = \dfrac{3}{48}n$

La población total menor de 18 años es:

$$\frac{5}{32}n + \frac{3}{48}n = \left(\frac{5}{32}+\frac{3}{48}\right)n = \frac{7}{32}n$$

$$\boxed{\text{Respuesta: } \frac{7}{32} \text{ (Opción: B.)}}$$

■

PROBLEMA 3. *Calcule el valor de la expresión*

$$S = \frac{(2018)^3 - (1008)^3 - (1010)^3}{2018\cdot 1008\cdot 1010}$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

SOLUCIÓN.- Hagamos $x = 1008$ y $y = 1010$, así $x + y = 1008 + 1010 = 2018$. De esta forma, la expresión S se reduce a:

$$S = \frac{(x+y)^3 - x^3 - y^3}{(x+y)xy}$$

Aplicando el binomio de Newton $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, obtenemos:

$$S = \frac{3x^2y + 3xy^2}{xy(x+y)} = \frac{3xy(x+y)}{xy(x+y)} = 3.$$

$$\boxed{\text{Respuesta: 3 (Opción: D.)}}$$

■

PROBLEMA 4. *Simplificar*

$$A = \log \left[\frac{\frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^4} + \frac{1}{100^6} + \cdots + \frac{1}{100^{100}}}{\frac{1}{100^4} + \frac{1}{100^6} + \frac{1}{100^8} + \cdots + \frac{1}{100^{102}}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

SOLUCIÓN.-

$$A = \log \left[\frac{\frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^4} + \frac{1}{100^6} + \cdots + \frac{1}{100^{100}}}{\frac{1}{100^2}\left[\frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^4} + \frac{1}{100^6} + \cdots + \frac{1}{100^{100}}\right]} \right]^{\frac{1}{2}} = \log \left[100^2\right]^{\frac{1}{2}} = \log 10^2 = 2$$

$$\boxed{\text{Respuesta: } 2 \text{ (Opción: B.)}}$$

■

PROBLEMA 5. *Simplificar la expresión Z cuando es igual a:*

$$Z = \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]^{-1} \div \left[(-2)^{-1} - (-3)^{-1}\right]^{-1}$$

(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{4}{7}$ (E) $\frac{8}{3}$

SOLUCIÓN.-

$$\begin{aligned}
Z &= \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]^{-1} \div \left[(-2)^{-1} - (-3)^{-1}\right]^{-1} \\
Z &= \left[1 - \frac{9}{4} + \frac{2}{3}\right]^{-1} \cdot \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right] \\
Z &= \left[\frac{12 - 27 + 8}{12}\right]^{-1} \cdot \left[\frac{-3 + 2}{6}\right] \\
Z &= -\frac{12}{7} \cdot \frac{-1}{6} = \frac{2}{7}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Respuesta: } \frac{2}{7} \text{ (Opción: B.)}}$$

■

PROBLEMA 6. *¿De cuántas formas se pueden ubicar en una fila de 7 asientos 3 varones y 4 mujeres, de tal manera que las mujeres ocupen los lugares impares?*

(A) 114 (B) 124 (C) 134 (D) 144 (E) 154

SOLUCIÓN.- Representemos gráficamente el problema, y luego emplearemos el principio de multiplicación

1^{er}	2^{do}	3^{er}	4^{to}	5^{to}	6^{to}	7^{mo}
M	V	M	V	M	V	M
4	3	3	2	2	1	1

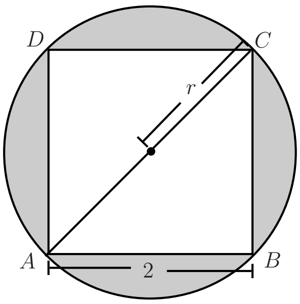
Por tanto, el numero de formas es igual a $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 144$.

Por tanto, se pueden ubicar de 144 formar diferentes.

Respuesta: 144 (Opción: D.)

■

PROBLEMA 7. *El cuadrado $ABCD$ esta inscrito en una circunferencia, con uno de sus lados de longitud 2 tal como se ve en la figura (r es radio de la circunferencia y el área del circulo es πr^2).*



Calcular el área sombreada.

(A) $2(\pi - 2)$ (B) $\pi - 2$ (C) $\pi - 4$ (D) 2π (E) $5(\pi - 1)$

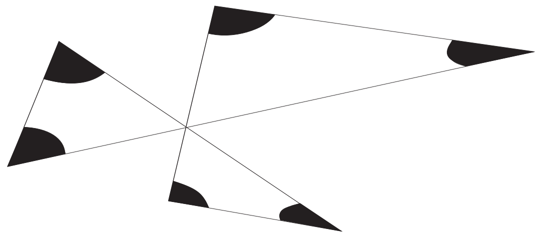
SOLUCIÓN.- Como $ABCD$ es un cuadrado, entonces las longitudes de sus lados todos son iguales, en particular $BC = 2$. Aplicando el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 2^2 + 2^2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

de donde $AC = 2\sqrt{2}$, de aquí el radio de la circunferencia es $r = \sqrt{2}$, luego el área de la circunferencia es $A_{\odot} = \pi(\sqrt{2})^2 = 2\pi$ y el área del cuadrado es $A_{\square} = 4$. Por tanto, el área sombreada de la figura es $2\pi - 4 = 2(\pi - 2)$.

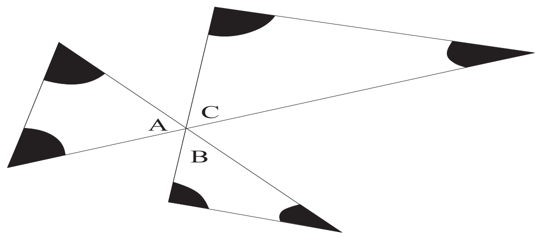
Respuesta: $2(\pi - 2)$ (Opción: A.)

PROBLEMA 8. *Considere 3 segmentos que se cortan en el vértice común de los 3 triángulos que se muestran en la figura. ¿Cuál es la suma de los ángulos marcados?*



(A) 160º (B) 260º (C) 360º (D) 460º (E) 560º

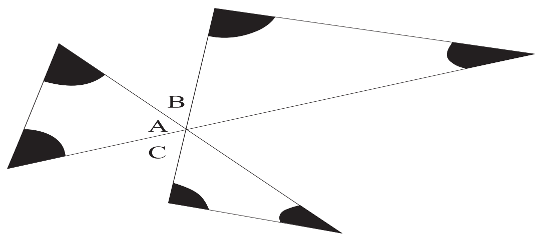
SOLUCIÓN.- Nombremos por A, B, C los 3 ángulos con un vértice en común como se muestra en el gráfico



Puesto que la suma de la medida de los ángulos interiores de un triángulo es 180º y como tenemos 3 triángulos, se sigue que la suma de todos los ángulos interiores de los 3 triángulos es $3 \cdot 180^{\circ}$. Luego, la suma de todos los ángulos marcados será

$$S = 3 \cdot 180^{\circ} - (A + B + C) = 540^{\circ} - (A + B + C)$$

Por otro lado, como los ángulos opuestos por el vértice tienen igual medida,



se tiene que $A + B + C = 180^{\circ}$, de donde $S = 540^{\circ} - 180^{\circ} = 360^{\circ}$.

$$\boxed{\text{Respuesta: } 360^{\circ} \text{ (Opción: C.)}}$$