Soluciones a la prueba - 2da fase - OPMat - 2019
CATEGORÍA ALFA

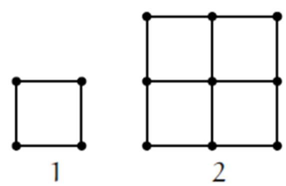
Problemas de selección múltiple: 1, 2, 3, 4

Problema 1. Un payaso tiene que disfrazarse para una fiesta, tiene cinco tipos de pelucas, tres bigotes y seis lentes. ¿De cuántas maneras puede ir disfrazado el payaso a la fiesta?

(A) 20 (B) 90 (C) 70 (D) 30 (E) Ninguno

Solución. Para calcular la cantidad de maneras en las que puede ir disfrazado el payaso, aplicamos el principio del producto: así, existen $5 \times 3 \times 6 = 90$ maneras de vestimenta para el payaso.

Problema 2. Un estudiante está construyendo cuadrados con palitos de fósforo, aumentando palitos como se ve en la figura (los dos cuadrados de la figura ya se encuentran construidos).



¿Cuántos palitos se debe agregar al cuadrado veinte para obtener el cuadrado veintiuno?

(A) 20 (B) 90 (C) 70 (D) 30 (E) Ninguno

Solución. Razonamos de forma inductiva, analizando casos particulares.

Cuadrado	Número de palitos
1	4
2	12
3	24
4	40
5	60

Realizando las restas de cuadrados consecutivos encontramos un patrón:

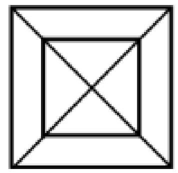
$$C_2 - C_1 = 12 - 4 = 8 = 4 \times 2$$
$$C_3 - C_2 = 24 - 12 = 12 = 4 \times 3$$
$$C_4 - C_3 = 40 - 24 = 16 = 4 \times 4$$

De forma general lo que se tiene que aumentar es:

$$C_{21} - C_{20} = 4 \times 21 = 84.$$

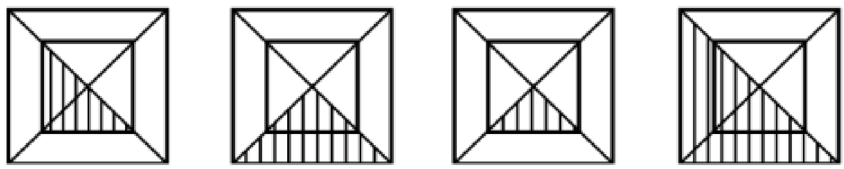
Por tanto, se debe agregar 84 palitos al cuadrado veinte para obtener el cuadrado veintiuno.

Problema 3. ¿ Cuantos triángulos hay en la figura ?



(A) 16 (B) 8 (C) 12 (D) 20 (E) Ninguno

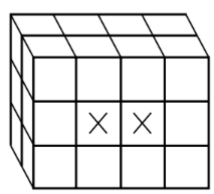
Solución. Hay 16 triángulos en grupos de 4 como en la figura.



Problema 4. Un bloque rectangular $4 \times 3 \times 2$ es pintado en su superficie de color rojo y luego es cortado en cubitos de lado 1. El número de cubitos teniendo exactamente una sola cara pintada de rojo es de:

(A) 4 (B) 8 (C) 6 (D) 7 (E) Ninguno

Solución. Hay solo 4 cubitos que están señalados en la figura (dos en la cara delantera y otras dos en la cara posterior).



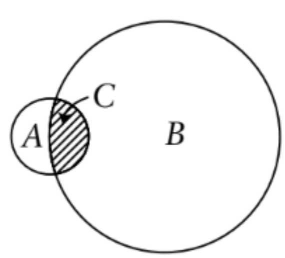
Problemas de respuesta corta: 5, 6, 7, 8

Problema 5. Las letras A, B, D, M representan los números $1, 8, 9, 9$, no necesariamente en ese orden. Hallar el valor más grande posible de la suma de BAD, DAM y MAD.
Solución.

$$\begin{aligned} BAD + DAM + MAD &= (100B + 10A + D) + (100D + 10A + M) + (100M + 10A + D) \\ &= 100(B + D + M) + 30A + (M + 2D). \end{aligned}$$

Nos conviene entonces hacer $M = 9, D = 9, B = 8, A = 1$. El número más grande de la suma es entonces 2657.

Problema 6. En la figura los círculos tienen radios 1 y 3 respectivamente. Si el área de la región sombreada es de $\pi/2$, hallar el área de toda la figura.



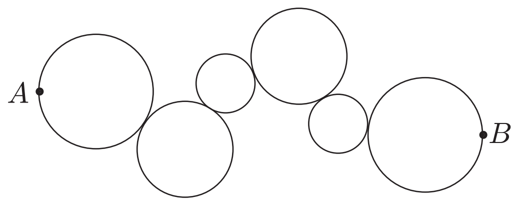
Solución. Sean A, B, C las áreas de las regiones mostradas en la figura. Tenemos

$$A = \pi \cdot 1^2 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$
$$B = \pi \cdot 3^2 - \frac{\pi}{2} = \frac{17\pi}{2}.$$

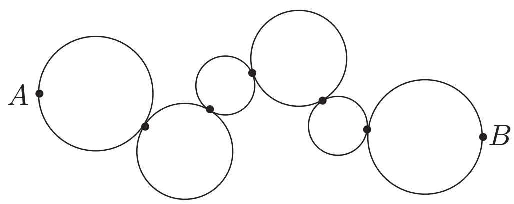
Por lo tanto,

$$\text{Área } = A + B + C = \frac{\pi}{2} + \frac{17\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{19\pi}{2}.$$

Problema 7. Sobre la figura de seis círculos tangentes, se ha propuesto trazar caminos de A a B de tal manera que ningún arco de circunferencia se cubra más de una vez ¿Cuántos caminos se podrán trazar?.



Solución.



Para llegar de un punto a otro hay dos caminos posibles, para llegar de A a B existen, por el principio del producto

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$$

Problema 8. Un número se dice perfecto si es igual a la suma de sus divisores distintos de el mismo, por ejemplo $6 = 3 + 2 + 1$ es perfecto. Hallar el siguiente número perfecto.
Solución. Analizando el problema, empezamos por ignorar los números primos, tenemos la siguiente tabla:

Número	Divisores	Suma
8	1, 2, 4	7
9	1, 3	4
10	1, 2, 5	8
12	1, 3, 4, 6	13
14	1, 2, 7	10
15	1, 3, 5	4
⋮	⋮	⋮
25	1, 5	6
26	1, 2, 13	16
28	1, 2, 4, 7, 14	28

Por tanto el siguiente numero perfecto despues del 6 es 28.