Soluciones a la prueba final - Categoría α

15° OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA

Problema 1. Determine el dígito de las unidades del número 9^{2019}.

Solución. Observemos el siguiente cuadro:

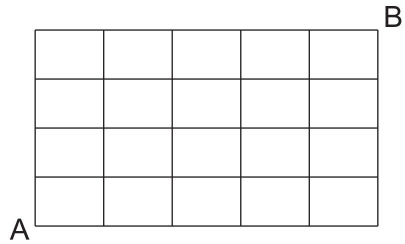
Potencia de 3	Número	Dígito de unidades
3^1	3	3
3^2	9	9
3^3	27	7
3^4	81	1
3^5	243	3
3^6	729	9
3^7	2187	7
3^8	6561	1
3^9	19683	3

Notemos que el comportamiento de los dígitos de las unidades de las potencias de 3 es cíclico: $3,\ 9,\ 7,\ 1$, se repiten con un periodo de 4; inferimos lo siguiente:

- si el resto de la división (de la potencia de 3) entre 4 es 0, el dígito de las unidades es 1;
- si el resto de la división (de la potencia de 3) entre 4 es 1, el dígito de las unidades es 3;
- si el resto de la división (de la potencia de 3) entre 4 es 2, el dígito de las unidades es 9;
- si el resto de la división (de la potencia de 3) entre 4 es 3, el dígito de las unidades es 7;

En nuestro problema la potencia de 3 es 4038 pues $9^{2019} = (3^2)^{2019} = 3^{4038}$; así, al dividir 4038 entre 4 conseguimos resto igual a 2, entonces el dígito de las unidades es 9.

Problema 2. Para trasladarnos del punto A al punto B los únicos movimientos permitidos son: moverse hacia la derecha ($\rightarrow$) y hacia arriba ($\uparrow$), ¿de cuántas maneras diferentes podemos trasladarnos del punto A hasta el punto B?



Solución. Consideremos combinaciones con repetición del conjunto:

$$\{\rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow\}.$$

El símbolo $(\rightarrow)$ se repite 5 veces (posibles caminos) y el símbolo $(\uparrow)$ se repite 4 veces (posibles caminos). Por tanto,

$$\frac{9!}{4! \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4! \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 9 \times 2 \times 7 = 126$$

es el total de maneras diferentes para trasladarnos del punto A al punto B.

Problema 3. Determine tres números, uno en cada casilla del dibujo, de modo que la suma de todos los números sea 35, que la suma de los números en las tres primeras casillas sea 22, y que la suma de los números en las últimas tres casillas sea igual a 25. ¿Cuál es el producto de los números que escribirá en la segunda y cuarta casilla?

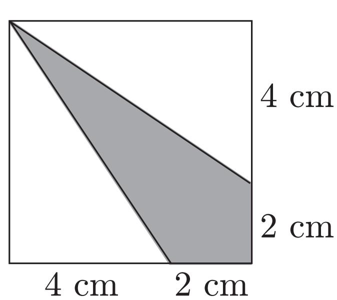
3				4

Solución. Si nombramos como a, b y c los tres números que ocuparán las casillas (en ese orden), tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3 + a + b + c + 4 &= 35 \\ 3 + a + b &= 22 \\ \qquad\quad b + c + 4 &= 25. \end{cases}$$

Al resolver el sistema, por sustitución grupal, tenemos que $a = 7$, $b = 12$ y $c = 9$. Por lo tanto, el producto de los números que ocupan la segunda y cuarta casilla es $a \times c = 7 \times 9 = 63$.

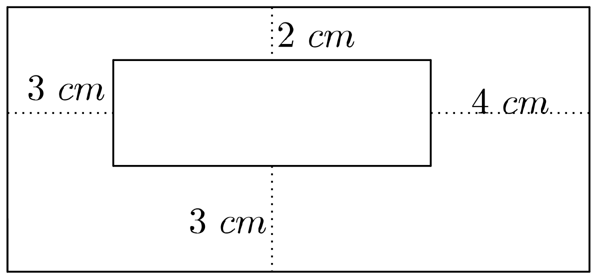
Problema 4. Se tiene un cuadrado de 6 cm de lado. ¿Qué fracción del área del cuadrado "no" está sombreada?



Solución. En la figura tenemos dos triángulos cuyas áreas son 12 cm^2, el área del cuadrado es de 36 cm^2, por lo tanto, el área de la región sombreada es de 12 cm^2. De esta manera, la fracción del área del cuadrado que "no" está sombreada es $\frac{24\ \mathrm{cm}^2}{36\ \mathrm{cm}^2} = \frac{2}{3}$.

Problema 5. El diagrama muestra dos rectángulos cuyos lados son paralelos.

¿Cuál es la diferencia de los perímetros de los dos rectángulos?



Solución. La diferencia entre las bases de ambos rectángulos es 7 cm, y la diferencia entre sus alturas es de 5 cm, así, la diferencia entre sus perímetros es $2 \times 7 + 2 \times 5 = 24$ cm.