Soluciones a la prueba - 2da fase - OPOMat - 2019
CATEGORÍA BETA

Problemas de selección múltiple: 1, 2, 3, 4

Problema 1. Si $xy = 6, yz = 9$ y $zx = 24$, entonces el valor de xyz es de:

(A) 36 (B) 40 (C) 32 (D) 25 (E) Ninguno

Solución. Multiplicando las ecuaciones tenemos que

$$x^2y^2z^2 = 6 \cdot 9 \cdot 24 = 6^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2,$$

luego $xyz = 6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$.

Problema 2. ¿Cuántos divisores (incluidos el uno y si mismo) tiene 576?

(A) 18 (B) 21 (C) 24 (D) 28 (E) Ninguno

Solución. Tenemos que la descomposición en factores primos de 576 esta dado por

$$576 = 2^6 \cdot 3^2.$$

Todos los divisores de 576 serán entonces de la forma $2^a \cdot 3^b$ con $0 \leq a \leq 6$ y $0 \leq b \leq 2$. Luego el número de divisores buscado es de $(6+1) \cdot (2+1) = 21$.

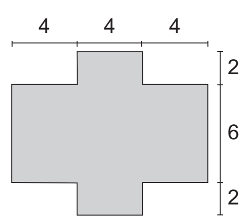
Problema 3. Una araña tiene 8 patas, una mosca tiene 6 patas. Tres moscas y cuatro arañas juntas, tienen tantas patas como cuatro conejos y:

(A) 12 gallinas (C) 17 gallinas (E) 16 gallinas

(B) 3 gallinas (D) 5 gallinas

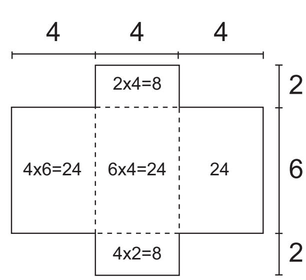
Solución. Tres moscas y cuatro arañas tienen $(3 \cdot 6) + (4 \cdot 8) = 50$ patas. Por otro lado, 4 conejos tienen 16 patas, así las patas que faltan son $50 - 16 = 34$, por lo tanto como cada gallina tiene dos patas la respuesta es 17 gallinas.

Problema 4. ¿Cuál será el área de la región sombreada?



(A) 60 (B) 59 (C) 89 (D) 88 (E) Ninguno

Solución.



usando el gráfico se tiene que

$$A_{sombreada} = 3 \cdot (24) + 2 \cdot (8) = 88u^2$$

Problemas de respuesta corta: 5, 6, 7, 8

Problema 5.Hallar las soluciones de la ecuación

$$x^2 - \sqrt{(x-1)^3} - \sqrt{(x-1)} + 2(x-1) = 0.$$

Solución.

$$x^2 - \sqrt{(x-1)^3} - \sqrt{x-1} + 2(x-1) = 0$$

$$x^2 - \sqrt{(x-1)^3} - \sqrt{x-1} + 2x - 2 = 0$$

$$x^2 - \sqrt{(x-1)^3} - \sqrt{x-1} - 2x + 1 + 2x + 2x - 1 - 2 = 0$$

$$(x-1)^2 - \sqrt{(x-1)^3} - \sqrt{x-1} + 4x - 3 = 0$$

$$(x-1)^2 - \sqrt{(x-1)^3} - \sqrt{x-1} + 4x - 4 + 4 - 3 = 0$$

$$(x-1)^2 - \sqrt{(x-1)^3} - \sqrt{x-1} + 4(x-1) + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 - (x-1)^{3/2} - (x-1)^{1/2} + 4(x-1) + 1 = 0$$

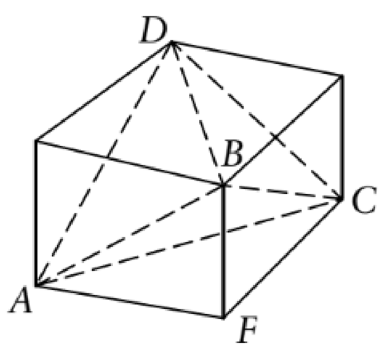
$$\left[(x-1)^{1/2}\right]^4 - \left[(x-1)^{1/2}\right]^3 - (x-1)^{1/2} + 4\left[(x-1)^{1/2}\right]^2 + 1 = 0$$

sea $y = (x-1)^{1/2}$entonces

$$y^4 - y^3 + 4y^2 - y + 1 = 0$$
$$y^4 - y^3 - y + 1 = -(2y)^2$$
$$(y-1)^2(y^2+y+1) = -(2y)^2$$

el lado izquierdo de la última igualdad es positiva, el lado derecho es negativo, ¿un número positivo igual a un número negativo?, la solución es inconsistente, (la ecuación no tiene solución).

Problema 6. Cuatro vértices de un cubo forman un tetraedro regular como en la figura. Hallar la fracción del volumen del cubo ocupado por el tetraedro.



Solución. En si hay 4 pirámides del cubo al exterior del tetraedro, cada uno de sus volúmenes siendo igual a $\frac{1/2}{3} = 1/6$ del volumen del cubo. La respuesta es entonces $1 - 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ del volumen del cubo.

Problema 7. ¿Cuál es el entero más cercano al número $\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$?

Solución. Racionalizamos

$$\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} \cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}{5-4}$$
$$= 5 + 4\sqrt{5} + 4$$
$$= 9 + 4\sqrt{5}$$

el punto más próximo a $4\sqrt{5} = \sqrt{80}$ es $9 = \sqrt{81}$. Por lo tanto el entero más cercano a $\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$ será 18.

Problema 8. ¿Cuál es el valor de $a + b + c$. ? Si las variables a, b, c son números enteros positivos y satisfacen la ecuación

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = \frac{25}{19}$$

Solución. Realizamos las operaciones

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = \frac{25}{19}$$

$$a + \cfrac{1}{\cfrac{bc+1}{c}} = \frac{25}{19}$$

$$a + \frac{c}{bc+1} = \frac{25}{19}$$

$$\frac{a(bc+1)+c}{bc+1} = \frac{25}{19}$$

igualando denominadores

$$bc + 1 = 19 \Rightarrow bc = 18 \qquad (*)$$

considerando $bc = 18$, igualamos numeradores

$$a(18+1) + c = 25$$

es decir

$$19a + c = 25$$

en esta operación necesariamente $a = 1$, luego $c = 25 - 19 = 6$, así de $(*)$ $b = 3$, por lo tanto

$$a + b + c = 1 + 3 + 6 = 10$$