

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
CARRERA DE MATEMÁTICAS



PROBLEMAS DE OLIMPIADAS
CATEGORIA BETA - ETAPA FINAL

PROFESOR: HEBE CONDORI CAUNA

Gestión II-2020

PROBLEMA 1

Hallar la suma de los dígitos de: $21 \times (1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + \dots + 10^{2007})$

Solución:

La cantidad que está dentro del paréntesis está formada exclusivamente de unos

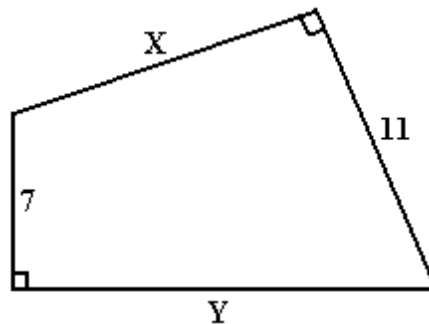
$$21 \times (1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{2007}) = 21 \times \underbrace{111\dots1}_{2008 \text{ unos}} = (20 + 1) \times \underbrace{111\dots1}_{2008 \text{ unos}} =$$

$$20 \times \underbrace{111\dots1}_{2008 \text{ unos}} + 1 \times \underbrace{111\dots1}_{2008 \text{ unos}} = \underbrace{222\dots20}_{2008 \text{ doses}} + \underbrace{111\dots1}_{2008 \text{ unos}} = \underbrace{2333\dots31}_{2007 \text{ treses}}$$

Por lo tanto la suma de sus cifras es $2 + 2007 \times 3 + 1 = 2 + 6021 + 1 = 6024$.

PROBLEMA 2

El cuadrilátero de la figura tiene en centímetros, medidas enteras y distintas en todos sus lados. Las medidas anotadas, 7 y 11 corresponden a los lados menores. ¿Cuánto miden los lados X y Y?



Solución:

Los lados de medidas X y 11 forman un triángulo rectángulo, lo mismo puede decirse de los otros dos lados restantes. Además, ambos triángulos rectángulos comparten una misma hipotenusa, así se tiene la siguiente ecuación:

$$X^2 + 11^2 = Y^2 + 7^2$$

De donde:

$$Y^2 - X^2 = 72$$

$$Y^2 - X^2 = 72$$

Esto es:

$$(Y - X)(Y + X) = 72$$

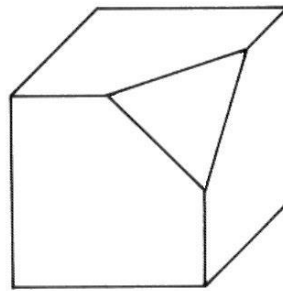
Como X y Y son números enteros, entonces cada uno de los paréntesis de la última ecuación debe corresponder con los posibles factores enteros de 72. Cada factorización dará lugar a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, las que al resolverse nos darán las posibles medidas de los lados.

Factor de 72		Medidas de:		Observaciones
$Y + X$	$Y - X$	X	Y	
72	1	—	—	No hay solución entera.
36	2	17	19	
24	3	—	—	No hay solución entera.
28	4	7	11	No son medidas distintas a las dadas.
12	6	3	9	No son medidas distintas a las dadas.
9	8	—	—	No hay solución entera.

Como puede verse, la única solución que cumple las condiciones pedidas es $X=17\text{cm}$ y $Y=19\text{cm}$.

PROBLEMA 3

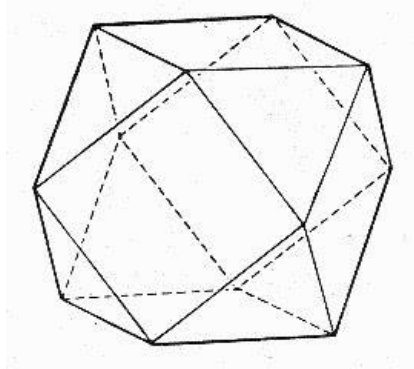
Considere un cubo al cual se le quitan todas las esquinas mediante cortes de planos que pasan por los puntos medios de las aristas que concurren en un vértice, se obtiene un poliedro llamado **CUBOCTAEDRO**, la siguiente figura muestra sólo uno de dichos cortes.



- ¿Qué forma tienen las caras del **CUBOCTAEDRO** y cuántas hay de cada tipo?
- Si el cubo original tiene 30 centímetros de arista, ¿cuál es la medida de la arista del **CUBOCTAEDRO**?

Solución:

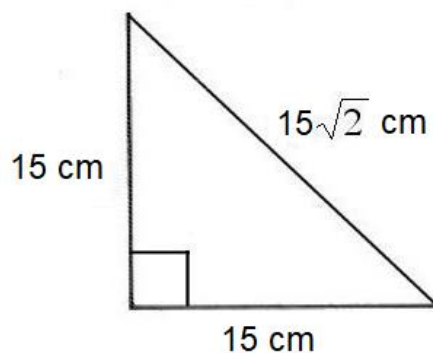
- La figura que resulta de quitarle a un cubo todas las esquinas mediante cortes de planos que pasan por los puntos medios de las aristas que concurren en un vértice es el **CUBOCTAEDRO**. Como puede verse en la siguiente figura:



Tiene 8 triángulos equiláteros, uno por cada esquina y seis caras de cuadrados, uno por cada cara.

- b) Según condición del problema el corte que va de un punto medio al otro es la hipotenusa de un triángulo rectángulo ya que el vértice del cubo está un ángulo recto y los catetos miden la mitad del lado del cubo, es decir 15 centímetros.

Para hallar el lado del **CUBOCTAEDRO** debemos aplicar el teorema de Pitágoras, considerando la siguiente imagen.



Por tanto la media de la arista del **CUBOCTAEDRO** es $15\sqrt{2}$ centímetros.

PROBLEMA 4

Ricardo, quien nació el siglo pasado, se dio cuenta que la edad que cumple el año 2021 es igual a la suma de los dígitos del año de su nacimiento.

- ¿En qué año nació Ricardo?
- ¿Cuántos años cumple Ricardo en el año 2021?

Solución:

Tenemos que Ricardo nació el siglo pasado, entonces supongamos que Ricardo nació en el año $19ab$ donde a y b son dígitos del conjunto $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Ahora por condición del problema, tenemos que la suma de los dígitos del año de su nacimiento es la edad que tiene el 2021. Pero la edad que tiene este 2021 es la diferencia que hay entre el año 2021 y el de nacimiento $19ab$. Así tenemos la siguiente ecuación:

$$1 + 9 + a + b = 2021 - (1000 + 900 + 10a + b) \quad (1)$$

De esta ecuación, despejamos b , así tenemos:

$$b = \frac{111-11a}{2} = 55 - 5a + \frac{1-a}{2} \quad (2)$$

De esta última ecuación, tenemos que a debe ser un número impar, es decir: $a = 2t + 1$, sustituyendo este valor en la ecuación (2) tenemos:

$$b = 55 - 5(2t + 1) + \frac{1 - (2t + 1)}{2}$$

Simplificando tenemos: $b = 50 - 11t$

Ahora a es un dígito, por tanto t puede tomar el único valor de 4. Así, si $t = 4$, entonces:

$$\begin{aligned} a &= 2(4) + 1 = 9 \\ b &= 50 - 11(4) = 6 \end{aligned}$$

Por tanto Ricardo nació en 1996 y cumple 25 años en el año 2021.

PROBLEMA 5

Un número entero es capicúa, si al escribirlo al revés se lee igual que el número original. Por ejemplo, el número 97879 es capicúa, pues al escribirlo al revés, se lee 97879 como el número original; sin embargo, el número 73458 no es capicúa, pues al escribirlo al revés, se lee 85437. ¿Cuántos y cuáles números capicúa de cinco dígitos son divisibles entre 45?

Solución:

Un número entero capicúa de cinco cifras se escribe $abcba$. Si queremos que sea divisible entre 45 entonces debe ser divisible entre 5 y entre 9.

- Si es divisible entre 5 entonces debe terminar en 5, el 0 lo descartamos ya que si terminara en cero al ponerlo al revés el primer dígito sería cero y ya no tendría cinco cifras. Luego el número capicúa es de la forma $5bcb5$.
- Si es divisible entre 9, la suma de los dígitos debe ser múltiplo de 9. Así, como b es un dígito entre 0 y 9, podemos asignarle valores y calcular para cada caso, el valor de c , de tal manera que los dígitos den una suma divisible entre 9.

Por tanto tenemos la siguiente tabla:

b	$5bcb5$	c
$b = 0$	$50c05$	$c = 8$
$b = 1$	$51c15$	$c = 6$
$b = 2$	$52c25$	$c = 4$
$b = 3$	$53c35$	$c = 2$

$b = 4$	54c45	$c = 0$ o $c = 9$
$b = 5$	55c55	$c = 7$
$b = 6$	56c65	$c = 5$
$b = 7$	57c75	$c = 3$
$b = 8$	58c85	$c = 1$
$b = 9$	59c95	$c = 8$

Por tanto, son once los números pedidos son:

<i>abcba</i>
50805
51615
52425
53235
54045
54945
55755
56565
57375
58185
59895