Soluciones a la prueba de la

1ra. fase

Categoría GAMMA

Problema 1. ¿Cuál es el mayor entero menor o igual que

$$\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30}}}}}\,?$$

A) 5 B) 6 C) 4 D) 3 E) Ninguna

Solución. Ya que $25 < 30 < 36$, tenemos $5 < \sqrt{30} < 6$. Sumando 30 en todos los miembros conseguimos $35 < 30+\sqrt{30} < 36$. Así,

$$5 < \sqrt{35} < \sqrt{30+\sqrt{30}} < \sqrt{36} = 6.$$

Repitiendo el mismo proceso conseguimos que

$$5 < \sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30}}}}} < 6,$$

así, el entero buscado es 5.

Problema 2. (20 puntos) Encuentre el dígito de las decenas de la expresión 2^{999}.

A) 2 B) 4 C) 8 D) 6 E) Ninguna

Solución. Calculamos los dígitos de las decenas de las primeras potencias de 2:

Potencia	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
Decenas y unidades	02	04	08	16	32	64	28	56	12	24

al no encontrar un patrón visible, continuamos buscando:

Potencia	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}	2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}
Decenas y unidades	48	96	92	84	68	36	72	44	88	76	52	04

Vemos que las potencias 2^2 y 2^{22} poseen los mismos dígitos de decenas y unidades que es 04, y a partir de dicha cantidad todo se repite. Tenemos entonces que 2^{20+n} y 2^n tienen el mismo dígito de las decenas. Así, dividimos 999 entre 20, es decir,

$$999 = 20 \cdot 49 + 19$$

y deducimos que 2^{999} y 2^{19} tienen el mismo dígito de las decenas, es decir, el dígito de las decenas de 2^{999} es 8.

Problema 3. (20 puntos) Determine el ángulo en C del triángulo ABC si conoce la relación

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin A \cdot \sin B + \sin^2 C.$$

A) $15°$ B) $30°$ C) $45°$ D) $60°$ E) Ninguna

Solución. La igualdad de encima es equivalente a

$$\frac{\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C}{\sin A \cdot \sin B} = 1$$

que a su vez es equivalente a

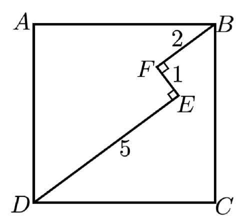
$$\frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin A} - \frac{\sin C}{\sin A} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = 1.$$

Utilizando la ley de los senos $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, la igualdad anterior se escribe como

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} = 1,$$

o como $a^2 + b^2 - c^2 = ab$. Usando la ley de los cosenos en la igualdad anterior conseguimos $2ab\cos C = ab$, por lo tanto, $\cos C = \frac{1}{2}$, que implica $C = 60°$.

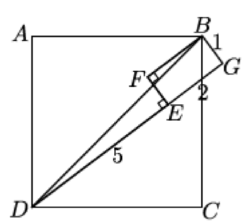
Problema 4. (25 puntos) En el cuadrado $ABCD$, los segmentos DE, EF y FB satisfacen $DE \perp EF$ y $EF \perp FB$ como se muestra en la figura.



Si se conoce que $DE = 5$, $EF = 1$ y $FB = 2$, ¿cuál es la longitud del lado del cuadrado?

A) $\sqrt{2}$ B $3\sqrt{2}$ C) $\frac{5}{3}\sqrt{2}$ D) $\frac{7}{5}\sqrt{2}$ E) Ninguna

Solución. Contruyamos el rectángulo $FBGE$; también marque la diagonal DB del cuadrado $ABCD$.



La diagonal del cuadrado $ABCD$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo DBG. Por el teorema de Pitágoras $DB^2 = 7^2 + 1^2 = 50$. Si denotanamos por x el lado del cuadrado, por el teorema de Pitágoras tenemos

$$x^2 + x^2 = DB^2 = 50,$$

de donde $x = 5$.

Problema 5. (25 puntos) Una función f está definida para todos los números enteros positivos y satisfaces $f(1) = 2021$ y la siguiente relación

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) = n^2 f(n),$$

para todo entero $n > 1$. Encuentre el valor de $f(2020)$.

A) $\frac{1}{1010}$ B) $\frac{1}{2020}$ C) $\frac{1}{2021}$ D) $\frac{2}{2021}$ E) Ninguna

Solución. Notemos que la igualdad

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) + f(n+1) = (n+1)^2 f(n+1)$$

puede escribirse como

$$n^2 f(n) + f(n+1) = (n+1)^2 f(n+1).$$

Despejando $f(n+1)$ obtenemos

$$f(n+1) = \frac{n}{n+2} f(n).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
f(2020) &= \frac{2019}{2021} f(2019) \\
&= \frac{2019}{2021} \cdot \frac{2018}{2020} f(2018) \\
&= \frac{2019}{2021} \cdot \frac{2018}{2020} \cdot \frac{2017}{2019} f(2017) \\
&= \frac{2019}{2021} \cdot \frac{2018}{2020} \cdot \frac{2017}{2019} \cdot \frac{2016}{2018} f(2016) \\
&= \frac{2019}{2021} \cdot \frac{2018}{2020} \cdot \frac{2017}{2019} \cdot \frac{2016}{2018} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} f(1),
\end{aligned}$$

y simplificando conseguimos

$$f(2020) = \frac{1}{2021} \cdot \frac{1}{2020} \cdot 2 \cdot f(1) = \frac{1}{2021} \cdot \frac{1}{2020} \cdot 2 \cdot 2021 = \frac{1}{1010}.$$