Solución de los ejercicios de la prueba Categoría γ : Segunda fase

Dr. Victor Hugo Patty Yujra

1. Considere la siguiente función definida en el conjunto de todos los números enteros x por

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x > 10 \\ f(f(x+2)), & x \leq 10 \end{cases}$$

El valor de $f(5)$ es igual a:

a) 6
b) 8
c) 10 ✓
d) 12
e) Ninguna de las anteriores.

Solución. 1 *Evaluando:*

$$\begin{aligned} f(5) &= f(f(7)) = f(f(f(9))) = f(f(f(f(11)))) = f(f(f(10))) = f(f(f(f(12)))) = f(f(f(11))) \\ &= f(f(10)) = f(f(f(12))) = f(f(11)) = f(10) = f(f(12)) = f(11) = 10. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

2. Halle la suma de los dígitos del menor entero positivo tal que al dividirlo entre 2 deja resto 1, al dividirlo entre 3 deja resto 2, al dividirlo entre 4 deja resto 3, al dividirlo entre 5 deja resto 4, al dividirlo entre 6 deja resto 5, al dividirlo entre 7 deja resto 6, al dividirlo entre 8 deja resto 7 y al dividirlo entre 9 deja resto 8.

a) 16
b) 17 ✓
c) 18
d) 19
e) Ninguna de las anteriores.

Solución. 2 *Denotemos por n el entero buscado. Las condiciones sobre n se traducen en que el entero $n+1$ es un múltiplo de $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. El menor de todos ellos es*

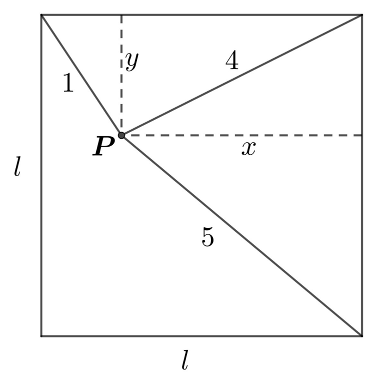
$$n + 1 = \textit{m.c.m.}(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520.$$

Conseguimos así $n = 2519$ y la suma de sus dígitos es 17. ◀

3. Sea P un punto interior de un cuadrado tal que las distancias a tres de sus vértices consecutivos sean iguales a $1, 4$ y 5, en ese orden. El área del cuadrado es igual a:

   a) $4\sqrt{17}$
   b) 17 ✓
   c) $4\sqrt{19}$
   d) $20{,}25$
   e) Ninguna de las anteriores.

   Solución. 3 *Denotemos por l el lado del cuadrado. Desde el punto $\mathbf{P}$ tracemos segmentos perpendiculares a los lados del cuadrado de longitudes x e y como está en la figura.*



   Usando el teorema de Pitágoras conseguimos las siguientes ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = 16, \qquad x^2 + (l - y)^2 = 25, \qquad y^2 + (l - x)^2 = 1.$$

   Resolviendo el sistema de ecuaciones encontramos $l^2 = 17$. ◀

4. Sabiendo que

$$(\sin 1^\circ) \cdot (\sin 3^\circ) \cdot (\sin 5^\circ) \cdot \ldots \cdot (\sin 87^\circ) \cdot (\sin 89^\circ) = \frac{1}{2^n},$$

   determine el valor de n.

   Solución. 4 *Note lo siguiente:*

$$\begin{aligned}
&(\sin 1^\circ) \cdot (\sin 3^\circ) \cdot (\sin 5^\circ) \cdot \ldots \cdot (\sin 87^\circ) \cdot (\sin 89^\circ) = \\
&= \frac{(\sin 1^\circ) \cdot (\sin 3^\circ) \cdot \ldots \cdot (\sin 87^\circ) \cdot (\sin 89^\circ) \cdot (\sin 2^\circ) \cdot (\sin 4^\circ) \cdot \ldots \cdot (\sin 86^\circ) \cdot (\sin 88^\circ)}{(\sin 2^\circ) \cdot (\sin 4^\circ) \cdot \ldots \cdot (\sin 86^\circ) \cdot (\sin 88^\circ)} \\
&= \frac{(\sin 1^\circ) \cdot (\sin 89^\circ) \cdot (\sin 2^\circ) \cdot (\sin 88^\circ) \cdot \ldots \cdot (\sin 44^\circ) \cdot (\sin 46^\circ) \cdot (\sin 45^\circ)}{(\sin 2^\circ) \cdot (\sin 4^\circ) \cdot \ldots \cdot (\sin 86^\circ) \cdot (\sin 88^\circ)} \\
&= \frac{(\sin 1^\circ) \cdot (\cos 1^\circ) \cdot (\sin 2^\circ) \cdot (\cos 2^\circ) \cdot \ldots \cdot (\sin 44^\circ) \cdot (\cos 44^\circ) \cdot (\sin 45^\circ)}{(\sin 2^\circ) \cdot (\sin 4^\circ) \cdot \ldots \cdot (\sin 86^\circ) \cdot (\sin 88^\circ)} \\
&= \frac{\frac{\sin 2^\circ}{2} \cdot \frac{\sin 4^\circ}{2} \cdot \frac{\sin 6^\circ}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin 86^\circ}{2} \cdot \frac{\sin 88^\circ}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{(\sin 2^\circ) \cdot (\sin 4^\circ) \cdot \ldots \cdot (\sin 86^\circ) \cdot (\sin 88^\circ)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{44} \cdot \frac{1}{2^{1/2}} = \frac{1}{2^{89/2}},
\end{aligned}$$

   así $n = 44{,}5$ ◀

5. (25 puntos) Encuentre todos los enteros positivos a, b, c tales que

$$a + b + c, \quad ab + bc + ca, \quad abc$$

forman (en ese orden) una progresión aritmética.

Solución. 5 *Supongamos que la terna (a, b, c) es una solución y que, sin pérdida de generalidad, $a < b < c$. Usando el hecho que la sucesión es una P.A., el número*

$$k = (a + b + c) + abc - 2(ab + ac + bc)$$

debe ser igual a cero. Considere los siguientes casos:

i. *Si $a = 1$, entonces $k = 1 - bc - b - c < 0$, no es posible.*

ii. *Si $a = 2$, entonces $k = 2 - 3b - 3c < 0$, no es posible.*

iii. *Si $a = 3$, entonces $k = bc + 3 - 5b - 5c$; luego $k = 0$ si y sólo si $(b - 5)(c - 5) = 22$, esto nos dá las siguientes soluciones:*

- *$b - 5 = 1$ y $c - 5 = 22$, de donde $b = 6$ y $c = 27$;*
- *$b - 5 = 2$ y $c - 5 = 11$, de donde $b = 7$ y $c = 16$.*

iv. *Si $a = 4$, entonces $k = 2bc - 7b - 7c + 4$; luego $k = 0$ si y sólo si $(2b - 7)(2c - 7) = 41$, esto nos dá la siguiente solución:*

- *$2b - 7 = 1$ y $2c - 7 = 41$, de donde $b = 4$ y $c = 24$.*

v. *Si $a = 5$, entonces $k = 3bc - 9b - 9c + 5$ y k no puede ser cero ya que 3 no divide a 5.*

vi. *Si $a > 6$, entonces $k > 6bc - 2(ab + ac + bc) = 2b(c - a) + 2c(b - a) > 0$, no es posible.*

Existen tres soluciones: $(3, 6, 27), (3, 7, 16)$ *y* $(4, 4, 24)$. ◀