Tercera Fase: Soluciones

Categoría γ

Victor Hugo Patty Yujra

1. Encuentre el mayor factor primo del número $3^{14} + 3^{13} - 12$.

   Solución. 1 *Debemos factorizar la expresión dada; tenemos*

$$\begin{aligned} 3^{14} + 3^{13} - 12 = 3^{13} \cdot (3+1) - 3 \cdot 4 &= 3^{12} \cdot 3 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \\ &= 3 \cdot 4 \cdot (3^{12} - 1) \\ &= 3 \cdot 4 \cdot (3^6 - 1) \cdot (3^6 + 1) \\ &= 3 \cdot 4 \cdot (3^3 - 1) \cdot (3^3 + 1) \cdot 730 \\ &= 3 \cdot 4 \cdot 26 \cdot 28 \cdot (10 \cdot 73), \end{aligned}$$

   por tanto, el mayor facto primo de $3^{14} + 3^{13} - 12$ *es* 73. ◀

2. Sean $A = \{2, 5, 10, 17, \ldots, n^2 + 1, \ldots\}$ y $B = \{10001, 10004, 10009, \ldots, n^2 + 10000\}$. Encuentre el número de elementos del conjunto $A \cap B$.

   Solución. 2 *Los números del conjunto* A *son de la forma* $x^2 + 1$, *mientras que los del conjunto* B *son de la forma* $y^2 + 10000$, *para* x *e* y *enteros positivos. Encontrar los elementos de* $A \cap B$ *significa encontrar números tales que* $x^2 + 1 = y^2 + 10000$, *es decir,*

$$(x + y) \cdot (x - y) = 9999.$$

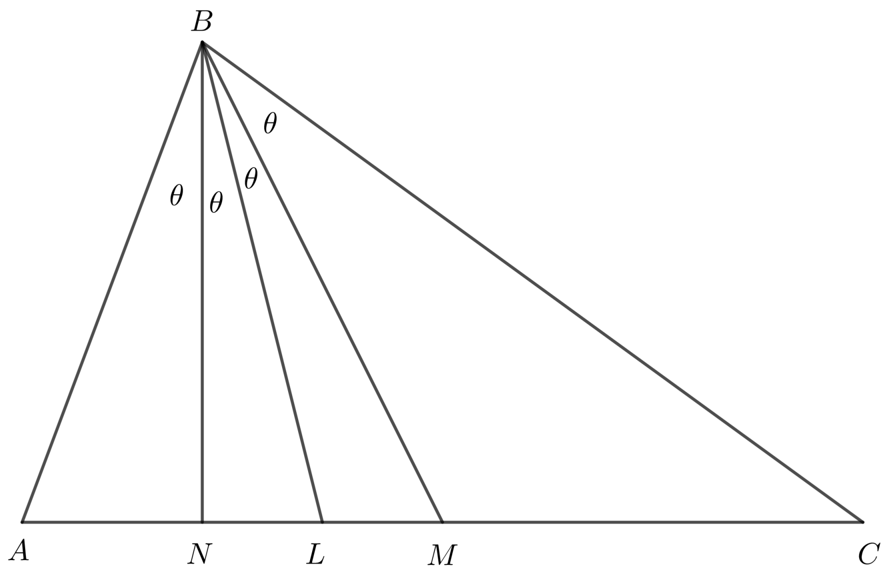
   Notemos además que $x > y$, *luego* $x + y > x - y$ *y como* $9999 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101$, *existen seis casos a considerar (que corresponden a los elementos de* $A \cap B$*):*

   - $x + y = 9999$,
   - $x + y = 1111$,
   - $x + y = 303$,
   - $x + y = 3333$,
   - $x + y = 909$,
   - $x + y = 101$.

   Por ejemplo, si $x + y = 9999$, *entonces* $x - y = 1$ *y* $x = 5000$, *mientras que* $y = 4999$. *Así, el número de elementos de* $A \cap B$ *es* 6. ◀

3. En un triángulo $\triangle ABC$ los segmentos BN, BL y BM son, respectivamente, la altura, la bisectriz del ángulo $\angle ABC$ y la mediana. Sabiendo que los ángulos $\angle ABN$, $\angle NBL$, $\angle LBM$ y $\angle MBC$ tienen la misma medida, determine las medidas de los ángulos internos del triángulo $\triangle ABC$.

Solución. 3 *Los datos del problema se presentan en la siguiente figura:*



Denotemos por $AM = MC = k$, $AB = c$ *y* $BC = a$. *En el* $\triangle BMC$ *tenemos*

$$\frac{a}{\sin(90^\circ + 2\theta)} = \frac{k}{\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{k} = \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta} \tag{1}$$

Análogamente, en el $\triangle ABC$ *tenemos*

$$\frac{a}{\sin(90^\circ - \theta)} = \frac{2k}{\sin 4\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{k} = \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta} \tag{2}$$

De (1) *y* (2) *podemos escribir*

$$\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta} = \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta},$$

de donde conseguimos

$$2\cos\theta\sin\theta = \cos\theta\sin 4\theta \quad \Rightarrow \quad \sin 2\theta = \cos\theta \cdot 2\cos 2\theta \sin 2\theta$$

simplificando (ya que $\sin 2\theta$ *debe ser diferente de cero) nos da* $\cos^2 2\theta = \frac{1}{2}$, *de donde,* $\cos 2\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *(la elección negativa no sirve en este caso) y luego* $2\theta = 45^\circ$, *así* $\theta = 22,5^\circ$. *Los ángulos buscados son* $\angle A = 67,5^\circ$, $\angle B = 90^\circ$ *y* $\angle C = 22,5^\circ$. ◀

4. Sea f una función definida en el conjunto de los enteros positivos que satisface las siguientes condiciones:

   a) $f(1) = 1$,

   b) $f(2n) = 2f(n) + 1$, si $n \geq 1$

   c) $f(f(n)) = 4n + 1$, si $n \geq 2$.

   Determine el valor de $f(2021)$.

   Solución. 4 *Calculemos algunas imágenes bajo la función* f :

   - $f(2) = f(2 \cdot 1) = 2f(1) + 1 = 3$,
   - $f(3) = f(f(2)) = 4 \cdot 2 + 1 = 9$,
   - $f(4) = f(2 \cdot 2) = 2f(2) + 1 = 7$,
   - $f(8) = f(2 \cdot 4) = 2f(4) + 1 = 15$,
   - $f(15) = f(f(8)) = 4 \cdot 8 + 1 = 33$.

   Notemos lo siguiente: $2021 = 4 \cdot 505 + 1$, *de la tercera propiedad* $f(f(505)) = 2021$. *Por otro lado,* $505 = 4 \cdot 126 + 1$, *luego* $f(f(126)) = 505$. *Ahora,* $f(126) = f(2 \cdot 63) = 2f(63) + 1$ *y como* $63 = 4 \cdot 15 + 3$, $f(f(15)) = 63$. *Usando lo encontrado encima,* $f(33) = 63$, *así,* $f(63) = f(f(33)) = 4 \cdot 33 + 1 = 133$. *Así,* $f(126) = 2f(63) + 1 = 2 \cdot 133 + 1 = 267$. *Luego,* $f(267) = f(f(126)) = 505$, $f(505) = f(f(267)) = 4 \cdot 267 + 1 = 1069$ *y* $f(1069) = f(f(505)) = 2021$. *Finalmente,* $f(2021) = f(f(1069)) = 4 \cdot 1069 + 1 = 4277$. ◄

5. Considere ab un número entero positivo de dos dígitos. Diremos que un entero positivo n es **conocido** de ab si satisface las siguientes propiedades:

   - el dígito de las unidades de n también es b,
   - los otros dígitos de n son distintos de cero y suman a.

   (Por ejemplo, los **conocidos** n de 31 son 31, 121, 211 y 1111.) Encuentre todos los números de dos dígitos que dividen a todos sus **conocidos**.

   Solución. 5 *Dividimos en casos.*

   a) *Si* $a = 1$ *y* n *es conocido de* ab, *entonces la única posibilidad es* $n = 1b$, *y claramente* $1b$ *divide a* $1b$.

   b) *Si* $a = 2$. *Como* $2b$ *debe dividir a* $11b$ *y a* $2b$, *entonces* $2b$ *divide a* $11b - 2b = 90$. *Los divisores de* $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ *son* $1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45$ *y* 90. *Como* $20 \leq 2b = 20 + b \leq 29$, *no hay soluciones en este caso.*

c) *Si* $a \geq 3$. *Como* ab *debe dividir a* $(a-3)21b$ *y a* $(a-3)12b$ *(son conocidos de* ab*), entonces* ab *divide a* $(a-3)21b - (a-3)12b = 90$, *luego las únicas posibilidades para* ab *son* $30, 45$ *y* 90, *ya que* $ab \geq 30$. *Veamos que* $30, 45$ *y* 90 *dividen a todos sus conocidos.*

1) *Si* n *es conocido de* 30, *entonces* $n = A0$ *donde* A *es un número cuya suma de dígitos es* 3. *Luego,* n *es múltiplo de* 10 *y de* 3, *y por lo tanto también de* 30.

2) *Si* n *es conocido de 45, entonces* $n = A5$ *donde* A *es un número cuya suma de dígitos es 4. Luego, la suma de los dígitos de* n *es 9 y por lo tanto* n *es un múltiplo de 9. Como* n *claramente es múltiplo de 5, se sigue que* n *es múltiplo de 45.*

3) *Si* n *es conocido de 90, entonces* $n = A0$ *donde* A *es un número cuya suma de dígitos es 9. Luego,* n *es un múltiplo de 9 y de 10, y por lo tanto de 90.*

Concluímos que los únicos enteros de dos dígitos que dividen a todos sus conocidos son: $10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 30, 45, 90$. ◄