4. Soluciones de la categoría α

α
Alfa
2da.
Prueba

1. Si se eligen tres números del cuadro, uno de cada fila y uno de cada columna, y se suman, ¿cuál es el mayor valor que puede tener la suma?

10	11	12
13	14	15
16	17	18

(A) 36 (B) 39 (C) 42 (D) 45 (E) 51

Solución 1. Reescribiendo el cuadro de la siguiente forma:

10 +0	10+1	10+2
13+0	13+1	13+2
16+0	16+1	16+2

notamos que en el problema debemos elegir en particular tres números de tal forma que no haya dos en misma fila del siguiente tablero

0	1	2
0	1	2
0	1	2

La máxima suma posible será 3. Notar que existen varias posibilidades para conseguir este propósito. Pero en el tablero original suman $10 + 13 + 16 + 3 = 42$.

Solución 2. Reescribiendo el cuadro de la siguiente forma:

10 +0	10+1	10+2
13+0	13+1	13+2
16+0	16+1	16+2

Si para cualquier número $x+p$ elegido como primero, donde x (fila) puede tomar los valores 10, 13, 16 y p (columna) puede tomar los valores 0, 1, 2. Por ejemplo, si $x = 13$ y $p = 2$, entonces para escoger el siguiente número ya no podemos elegir el 13 y 2, pues no podemos repetir en la misma fila y columna respectivamente, luego los valores que puede tomar x es 10 y 16 y para p son el 0 y 1. Si escogemos el segundo número $x = 16$ y $p = 1$, entonces para el tercer número sólo nos queda $x = 10$ y $p = 0$, ahora sumamos estos números:

$$10 + 13 + 16 + 0 + 1 + 2 = 42$$

Así podemos concluir que sin importar como se escojan los números, siempre y cuando no se repita la fila y columna la suma siempre va ser igual a 42.

$\boxed{\text{Respuesta (C) 42}}$

2. En tres días María ganó 280 Bolivianos, si cada día ganó la mitad de lo que ganó el día anterior. ¿Cuánto ganó el tercer día?.

α

Alfa
2da.
Prueba

,
(A) 30 (B) 40 (C) 50 (D) 60 (E) 70

Solución 1. El segundo día ganó el doble del tercer día. El primer día gano el doble del segundo día, es decir, cuatro veces lo del tercer día. En total, ganó $1+2+4=7$ veces lo que ganó el tercer día. Entonces, el tercer día ganó $280/7=40$ Bs.

Solución 2. Consideremos a x la cantidad ganada el primer día, entonces $\frac{1}{2}x$ es la cantidad ganada el segundo día, luego $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)$ es la cantidad ganada el tercer día. Asi sumando las ganancias de los tres días e igualando a 280 Bs, tenemos la ecuación $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)=280$, de aquí $x=160$. Por tanto, el hombre gano $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x)=\frac{1}{4}\cdot 160=40$ Bs. en el tercer día.

Respuesta (B) 40

3. En una competencia de encestar de basketball, cada competidor lanza diez pelotas que están numeradas del 1 al 10. El número de puntos obtenidos por cada vez que encesta es igual al número de la pelota. Si un competidor falla exactamente dos lanzamientos, ¿cuál de los siguientes puntajes no es posible?

(A) 52 (B) 44 (C) 41 (D) 38 (E) 35

Solución. Primeramente sumaremos todos los números de las pelotas

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$$

Ahora vamos a suponer que el jugador falla las pelotas numeradas con el 10 y 9 entonces el puntaje obtenido es 36, y si falla las pelotas numeradas con los números 1 y 2 su puntaje obtenido es 52, Así el mínimo puntaje posible es 36 y el máximo puntaje posible es 52, entonces el puntaje que no es posible es 35.

Respuesta (E) 35

4. Si, $a^{\triangle}=\dfrac{a+2}{a-1}$ con $a\neq 1$, $b^{\square}=\dfrac{b^2-1}{b}$ con $b\neq 0$ y $c^{\bigcirc}=(c-1)^2$.

Por ejemplo, $3^{\triangle}=\dfrac{3+2}{3-1}=\dfrac{5}{2}$. Hallar: $Z=((2^{\triangle})^{\square})^{\bigcirc}$

(A) 95/9 (B) 121/16 (C) 81/16 (D) 106/14 (E) 132/25

Solución.

$$Z=((2^{\triangle})^{\square})^{\bigcirc}=\left(\left(\frac{2+2}{2-1}\right)^{\square}\right)^{\bigcirc}=(4^{\square})^{\triangle}=\left(\frac{4^2-1}{4}\right)^{\triangle}=\left(\frac{15}{4}\right)^{\triangle}=\left(\frac{15}{4}-1\right)^2=\frac{121}{16}$$

Respuesta (B) $Z=121/16$

5. Hernán escribe en la pizarra todos los números positivos menores que 50, que tienen exactamente 4 divisores positivos. Calcular la suma de todos los números que escribió Hernán.

α
Alfa
2da.
Prueba

(A) 230 (B) 269 (C) 374 (D) 456 (E) 470

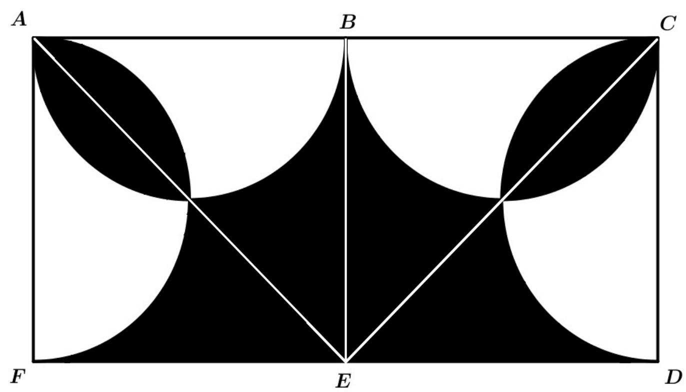
Solución. Un número que tenga exactamente cuatro divisores positivos es el producto de dos primos distinto o la potencia al cubo de un primo. Los primeros primos

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$$

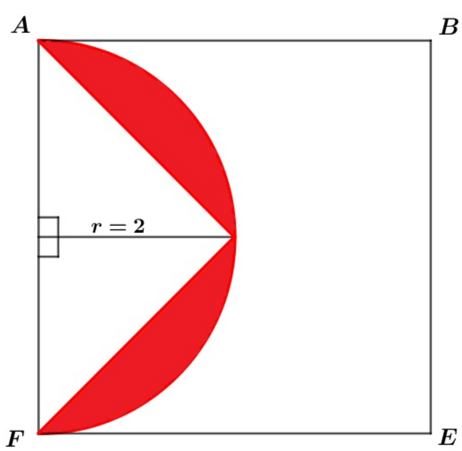
sirven, el siguiente primo 29 multiplicado por 2 es muy grande. Los números menores a 50 obtenidos al multiplicar dos primos distintos son $6, 10, 14, 22, 26, 34, 38, 46$, $15, 21, 33, 39$ y 35. Las potencias cúbicas de un primo menores a 50 son $8, 27$. Así la suma de todos estos números es 374.

$$\boxed{\text{Respuesta (C)} \quad 374}$$

6. En la figura $ABEF$ y $BCDE$ son cuadrados iguales y se trazan los semicírculos de diámetros AB, AF, BC y CD. Si $AB = 2$, el área de la parte sombreada es:



Solución. En el semicírculo de diámetro AF podemos observar que las dos áreas pintadas de rojo son iguales por que ambos ángulos son rectos (90°) y comparten el mismo radio $r = 2$.

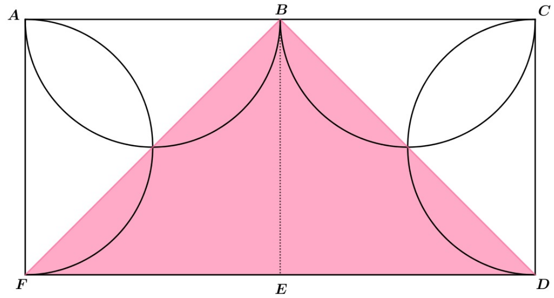


Haciendo el mismo procedimiento para los demás semicírculos de diámetros AB, BC y CD podemos obtener la siguiente imagen

α

Alfa
2da.
Prueba

,

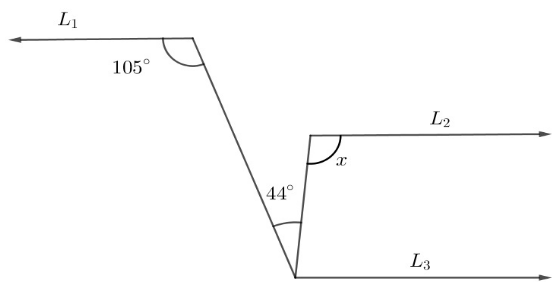


Así calcular el área del triángulo es equivalente a obtener el área de la parte sombreada buscada. Esto es:

$$A_{\triangle} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$

Respuesta 4

7. En el siguiente gráfico, se cumple que L_1, L_2 y L_3 son paralelas. El valor del ángulo x en grados es igual a

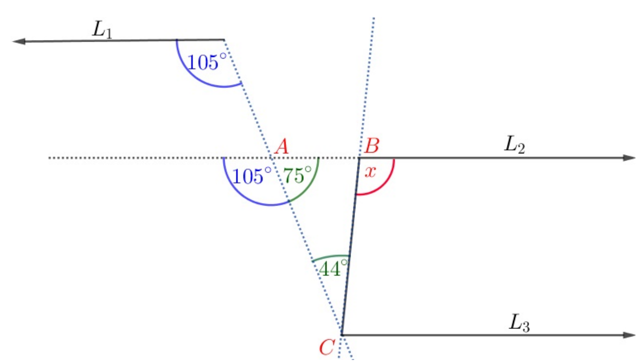


Solución. Trazando la recta L_2, de manera que formamos un triángulo ABC.

El ángulo correspondiente a 105° esta pintado de azul, y el ángulo suplementario de 105° es $75° = 180° - 105°$ (ver gráfico). Luego el ángulo externo x del triángulo ABC es igual a la suma de las medidas de dos ángulo interiores 75° y 44° del triángulo ABC, es decir:

$$x = 75° + 44°$$

Por tanto, $x = 119°$.



Respuesta 119

8. El valor de la suma

$$2021 - 2019 + 2017 - 2015 + 2013 - 2011 + \cdots + 5 - 3 + 1$$

α

Alfa
2da.
Prueba

,

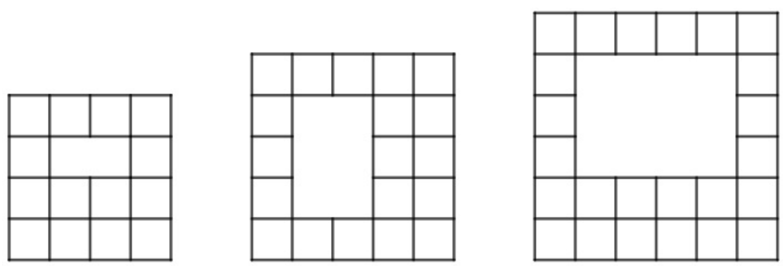
es igual a:

Solución. Denotemos con la letra n a toda la suma de los números impares con signos alternados. Es decir:

$$
\begin{aligned}
n =& 2021 - 2019 + 2017 - 2015 + 2013 - 2011 + \cdots + 5 - 3 + 1 \\
=& \underbrace{[2(1010)+1] - [2(1009)+1] + [2(1008)+1] - \ldots + [2(2)+1] - [2(1)+1]}_{\text{1010 términos}} + [2(0)+1] \\
=& \underbrace{(2021 - 2019)}_{2} + \underbrace{(2017 - 2015)}_{2} + \underbrace{(2013 - 2011)}_{2} + \ldots + \underbrace{(5 - 3)}_{2} + 1 \\
=& \underbrace{2 + 2 + 2 + 2 + \ldots + 2}_{505\ veces} + 1 \\
=& 2(505) + 1 \\
=& 1011
\end{aligned}
$$

Respuesta 1011

9. Abajo se muestran las tres primeras figuras de una secuencia de figuras.



¿Cuántos cuadraditos de estos $\square$ hay en la séptima figura?

Solución.

1ra figura: 1×2 cuadraditos faltantes y $4 \times 4 - 1 \times 2$ cuadraditos que se observan.

2da figura: 2×3 cuadraditos faltantes y $5 \times 5 - 2 \times 3$ cuadraditos que se observan.

3ra figura: 3×4 cuadraditos faltantes y $6 \times 6 - 3 \times 4$ cuadraditos que se observan.

4ta figura: 4×5 cuadraditos faltantes y $7 \times 7 - 4 \times 5$ cuadraditos que se observan.

5ta figura: 5×6 cuadraditos faltantes y $8 \times 8 - 5 \times 6$ cuadraditos que se observan.

6ta figura: 6×7 cuadraditos faltantes y $9 \times 9 - 6 \times 7$ cuadraditos que se observan.

7ma figura: 7×8 cuadraditos faltantes y $10 \times 10 - 7 \times 8$ cuadraditos que se observan.

Luego en la séptima figura hay $10 \times 10 - 7 \times 8 = 44$ cuadraditos $\square$.

Respuesta 44