β

1ra.
Prueba

8. Soluciones de la categoría β

10. Hallar el valor de E si

$$E = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1295}+\sqrt{1296}}$$

(A) 31 (B) 32 (C) 33 (D) 34 (E) 35

Solución. Racionalizamos cada sumando.

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{4-5} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}} \cdot \frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}{\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}$$

de forma similar procedemos con los demás sumandos, así tenemos:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{-1} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{-1} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{7}}{-1} + \ldots + \frac{\sqrt{1295}-\sqrt{1296}}{-1} = \\ &= \frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{7}+\ldots+\sqrt{1295}-\sqrt{1296}}{-1} = \\ &= \frac{\sqrt{4}-\sqrt{1296}}{-1} = \frac{2-36}{-1} = \frac{-34}{-1} = 34 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Respuesta (D) } E = 34}$$

11. Sabiendo que en este año 2021, la suma de las edades actuales de los tres miembros de una familia es 69. Si la edad actual de la madre quintuplica la edad del hijo y hace tres años la edad del padre era diez veces la edad del hijo. El año en que nació el hijo es:

(A) 2010 (B) 2015 (C) 2007 (D) 2011 (E) 2021

Solución. Sean x, y, z las edades actuales de la madre, padre e hijo respectivamente.

Por condición del problema:

$$\begin{cases} x+y+z=69 \\ x=5z \\ y-3=10(z-3) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema tenemos $z=6$ años, así el año en que nació el hijo es $2021-6=2015$

$$\boxed{\text{Respuesta (B) 2015}}$$

12. ¿Cuál es la suma de todos los enteros positivos n que dejan 15 como residuo al dividir 141 entre n?

(A) 250 (B) 260 (C) 270 (D) 280 (E) 290

Solución. Si dividimos 141 entre n, tenemos un cociente q y resto 15. Esto es:

$$141 = nq + 15 \text{ entonces } nq = 126$$

Por tanto n debe ser un divisor de 126, que sea mayor a 15. así los casos para n son: $18,\ 21,\ 42,\ 63$ y 126. Sumando tenemos 270.

$\boxed{\text{Respuesta (C) 270}}$

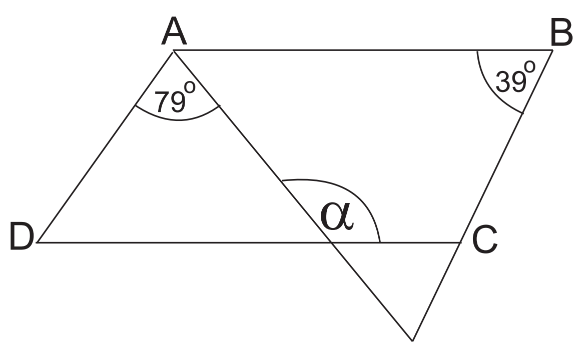
13. En una maratón hubo más de 1000 corredores. El 40 % fueron mujeres y participaron 260 hombres más que mujeres. La cantidad de corredores en total es:

(A) 1100 (B) 1300 (C) 1320 (D) 1340 (E) 1360

Solución. La cantidad de hombres en la maratón es $100\,\% - 40\,\% = 60\,\%$, por tanto participó un 20 % mas de hombres que de mujeres, y esta cantidad es de 260, así el número total corredores es: $\dfrac{260}{0{,}2} = 1300$.

$\boxed{\text{Respuesta (B) 1300}}$

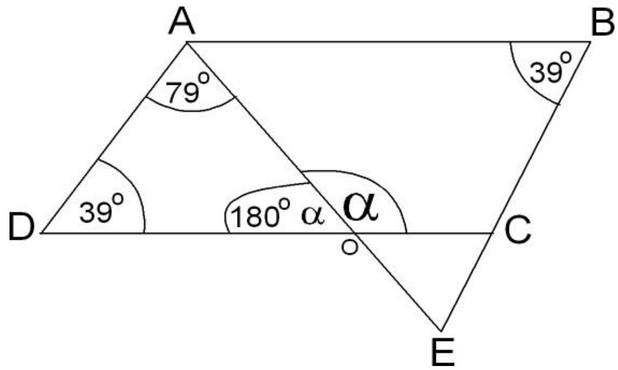
14. Considere el paralelogramo $ABCD$, Cuánto vale α



(A) 116° (B) 118° (C) 120° (D) 122° (E) 124°

Solución. Consideremos la siguiente figura:

Sea O el punto de intersección entre los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{DC}$. Ahora como $ABCD$ es un paralelogramo, entonces $\angle ADC = \angle ABC$.



Por otro lado en la figura, se puede aplicar el ángulo complementario de α.
Finalmente en el triángulo ADO tenemos que la suma de sus ángulos internos es 180º, así:
$79° + 39° + 180° - \alpha = 180°$ así $\alpha = 118°$

$$\boxed{\text{Respuesta (B) } \alpha = 118°}$$

15. En un curso de una unidad educativo hay 30 estudiantes alineados en 5 filas y 6 columnas. Cada estudiante le da la mano a todos los estudiantes que se sientan a su lado, incluyendo los que se sientan diagonalmente a su lado. ¿Cuántos saludos hubo?.

(A) 79 (B) 89 (C) 99 (D) 109 (E) 110

Solución. Los 4 estudiantes que están en las esquinas saludan a 3 estudiantes cada uno.

En los bordes, pero no en las esquinas hay 14 estudiantes que saludan a 5 estudiantes. Cada uno de los estudiantes que no están en el borde, que son 12 saludan a 8 estudiantes.

Sumando todos estos saludos, tendremos el doble del total, ya que cada saludo se contó dos veces, Así tenemos:

$$\frac{4 \cdot 3 + 14 \cdot 5 + 12 \cdot 8}{2} = 89 \text{ saludos}$$

$$\boxed{\text{Respuesta (B) 89}}$$

16. Sí $3^{y+2} - 3^y = 2^x + 2^{x+1}$, donde x, y son enteros. El valor de $x + y$ es:

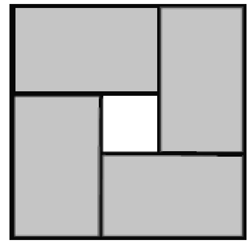
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Solución. Tomamos el primer miembro de la ecuación $3^{y+2} - 3^y = 3^y(3^2 - 1) = 3^y \cdot 8 = 3^y \cdot 2^3$

Además en el segundo miembro $2^x + 2^{x+1} = 2^x \cdot 3$
Así tenemos $3^y \cdot = 2^x \cdot 3$
Entonces $y = 1$; $x = 3$
Así $x + y = 4$

$\boxed{\text{Respuesta (D) 4}}$

17. Considere la figura en la que se muestran cuatro rectángulos iguales dentro de un cuadrado. Si el perímetro de cada rectángulo es de 18 metros. ¿Cuál es el área del cuadrado original?.



(A) $36\ m^2$ (B) $49\ m^2$ (C) $64\ m^2$ (D) $81\ m^2$ (E) $100\ m^2$

Solución. Sean $x,\ y$ los lados del rectángulo entonces $2(x+y)=18$, entonces $x+y=9$ que es el lado del cuadrado, así el área es $81\ [m^2]$

$\boxed{\text{Respuesta (D) } 81\ [m^2]}$

18. Sí $(a+b+c+d)^2 = 4(a+b)(c+d)$. Hallar el valor de

$$F = 27^{\dfrac{c+d}{3(a+b)}}$$

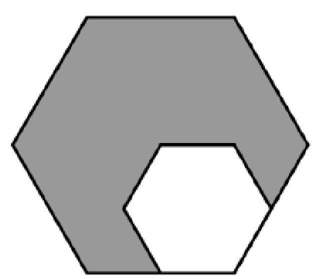
(A) 3 (B) 9 (C) 27 (D) 1 (E) -1

Solución. Sea $a+b=m$, $c+d=n$, entonces $(m-n)^2 = 4mn$ entonces $m^2-2mn+n^2=0$, entonces $(m-n)^2=0$ entonces $m=n$.
Así $a+b=c+d$.

Luego $F = 27^{\dfrac{c+d}{3(a+b)}} = 27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$.

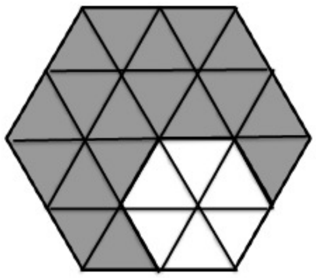
$\boxed{\text{Respuesta (A) } F=3}$

19. Considere la figura en donde se muestran dos hexágonos regulares. Los lados del hexágono grande miden el doble que los lados del hexágono pequeño. El hexágono pequeño tiene un área de 6 cm^2. El área del hexágono grande es:



(A) 16 cm^2 (B) 24 cm^2 (C) 28 cm^2 (D) 36 cm^2 (E) 44 cm^2

Solución: Consideremos la siguiente gráfica. Podemos dividir el hexágono en 24 triángulo equiláteros iguales como el hexágono menor, tiene el área del 6 cm^2, entonces cada triángulo tiene un área de 1 cm^2. por tanto el área del hexágono grande es 24 cm^2.



$\boxed{\text{Respuesta (B) } 24\ [cm^2]}$

20. ¿Cuántas veces aparece el dígito 9 en la lista de números:

$$1, 2, 3, 4, \ldots, 2020, 2021?$$

(A) 426 (B) 522 (C) 699 (D) 600 (E) 602

Solución 1. En las unidades, entre los números de 1 al 99, encontramos diez 9's; en las decenas hay diez 9's, en total son veinte 9's. Hay veinte 9's, lo mismo sucede en cada grupo de 100 hasta llegar a 999. Por tanto son $10 \times 20 = 200$, más los cien en las centenas, nos dan trescientos 9's entre 1 y 999. Como los mismo sucede entre 1000 y 1999, tenemos seiscientos 9's del 1 al 1999. Considerando los dos adicionales de 2009 y 2019, resultan en total 602 nueves.

Solución 2. Consideremos la secuencia $000, 001, 002, \ldots, 999$.

Son 1000 números y cada dígito se usa la misma cantidad de veces.

Entonces $\dfrac{3000}{10} = 300$

De 1000 a 1999, son también 300. Y los dos adicionales son de 2009 y 2019

Por tanto en número 9 aparece 602 veces en la lista.

$\boxed{\text{Respuesta (E) } 602}$

21. Sean x, y enteros positivos con $8 < x < 16$. Si

$$y(x^2 - 2000) + x(y^2 - 2000) = 0,$$

entonces $x + y$ es igual a:

(A) 210 (B) 2021 (C) 405 (D) 200 (E) 420

Solución. Tomamos $yx^2 - 2000y + xy^2 - 2000x = 0$

Operando $(x + y)(2000 - xy) = 0$

Entonces $x + y = 0$ ó $2000 - xy = 0$

Como x, y son enteros positivos entonces $2000 - xy = 0$ entonces $xy = 2000 \Longrightarrow y = \frac{2000}{x}$ con $x \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

Así $x = 10$; $y = 200 \Longrightarrow x + y = 210$

$\boxed{\text{Respuesta (A) 210}}$