5. Soluciones de la categoría β

β

Beta
2da.
Prueba

10. Sea la sucesión de números enteros:

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \ldots$$

¿Cuál es el número que esta en la posición 2021?

(A) 61. (B) 62. (C) 63. (D) 64. (E) 65.

Solución. Se tiene que identificar en que grupo cae el 2021.

- El término número 1 cae en el último número del bloque de los 1's.
- El término número 3 cae en el último número del bloque de los 2's.
- El término número 6 cae en el último número del bloque de los 3's.

De forma general, el término número n cae en el último número del bloque, por tanto $1 + 2 + 3 + \ldots + m = n$.

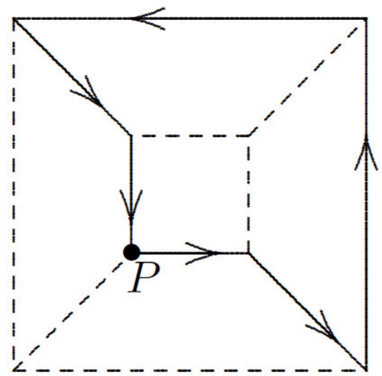
Pero $1 + 2 + 3 + \ldots + m = \dfrac{m(m+1)}{2}$.
Así es suficiente encontrar un número m que cumpla: $S_m = \dfrac{m(m+1)}{2} \geq 2021$ y $S_{m-1} < 2021$.
Si $m = 64$, entonces cumple con lo pedido, así el número que esta en la posición 2021 es 64.

$\boxed{\text{Respuesta (D) 64}}$

11. Una araña camina solo por las aristas de un cubo. Empieza en el vértice P, al final de la primera arista gira a la derecha, al final de la segunda arista gira a la izquierda y así sucesivamente va alternando giro a la derecha con giro a la izquierda. ¿Cuál es la cantidad de aristas que debe caminar para regresar por primera vez a P?.

(A) 6. (B) 12. (C) 15. (D) 18. (E) 24.

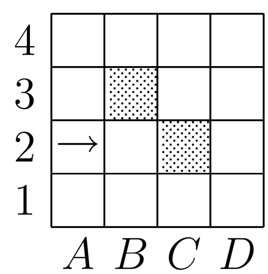
Solución. Podemos notar que cada arista es parte de dos cuadrados y que el movimiento hace que cuando la araña ha recorrido exactamente dos aristas de un mismo cuadrado, la siguiente arista que toma es en otro cuadrado distinto, por tanto el movimiento es como se muestra en la siguiente figura:



Así la cantidad de aristas que debe caminar para regresar por primera vez a P es 6.

$\boxed{\text{Respuesta (A) 6}}$

12. Daniela camina dentro de un tablero de 4×4 en los cuadrados blancos empezando en el cuadrado $A2$ y en el sentido de la flecha (ver figura). Daniela siempre va de frente a menos que se tope con un obstáculo (es decir, con la orilla del tablero o con un cuadro gris) en tal caso da vuelta a la derecha, sin embargo se detiene si al dar la vuelta a la derecha encuentra otra vez un obstáculo, ¿En que posición del tablero se detiene?.



(A) $B1$. (B) $A4$. (C) $D1$. (D) $C4$. (E) Nunca.

Solución. Daniela nunca se detiene, ya que según el tablero, empieza en $A2$, luego va a $B2$, luego va a $A1$ y luego va por la orilla del tablero de forma indefinida.

$\boxed{\text{Respuesta (E) Nunca}}$

13. Arturo tiene un hijo que se llama Luis y un nieto que se llama Pedro. Arturo se da cuenta que su edad, la edad de su hijo y la edad de su nieto son tres números que cumplen las siguientes dos condiciones:

    (a) Al ser divididos por un número impar mayor que 1, el resultado no es un número entero.

    (b) Al sumar las tres edades se obtiene 100 años

    ¿Cuántos años tiene Luis?

(A) 28. (B) 16. (C) 32. (D) 64. (E) 4.

Solución. Para que las edades de Arturo, Luis y Pedro no puedan ser divisibles por un número impar, entonces los números deben ser pares. Los únicos números pares del 2 al 100 que no son divisibles por un impar mayor a 1 son $\{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$. Así la única combinación de estos 6 para que 3 de ellos sumen 100 son $64, 32$ y 4.

$\boxed{\text{Respuesta (C) 32}}$

14. El reloj de Fernando esta retrasado por 12 minutos, pero el cree que está adelantado por 5 minutos. El reloj de Teresa esta adelantado por 5 minutos, pero ella cree que está retrasado por 10 minutos. Si Fernando cree que son las 13:00. ¿Qué hora cree Teresa que es?

(A) 12:48. (B) 12:52. (C) 13:28. (D) 13:32. (E) 13:42.

Solución. Si Fernando cree que son las $13:00$ entonces su reloj marca las $13:05$ ya que cree que esta adelantado 5 minutos. Como el reloj de Fernando en realidad esta retrasado 12 minutos, entonces la hora real es $13:17$. Por otro lado el reloj de Teresa esta adelantado 5 minutos, entonces marca $13:22$. Pero Teresa cree que su reloj está atrasado 10 minutos, entonces cree son las $13:32$.

$\boxed{\text{Respuesta (D) } 13:32}$

15. ¿Cuál de los siguientes números no puede escribirse como $x + \sqrt{x}$ para x un entero?

(A) 992. (B) 56. (C) 132. (D) 462. (E) 168.

Solución. Notemos que $\sqrt{x}$ es un entero porque deber ser la diferencia de dos enteros. Como $x + \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)$, buscamos números que son producto de dos enteros consecutivos. Notamos que $992 = 31 \cdot 32$; $56 = 7 \cdot 8$; $132 = 11 \cdot 12$; $462 = 21 \cdot 22$. Pero 168 no es producto de dos enteros consecutivos.

$\boxed{\text{Respuesta (E) 168}}$

16. Los números 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 y 100, se van a acomodar en el cuadrado de la figura, de forma que el producto de los tres números en cada fila, en cada columna y en cada diagonal sean iguales. Dos números ya se escribieron en el cuadrado. ¿Qué número se debe escribir en el cuadrado con el signo de interrogación?

		50
?		4

β

Beta
2da.
Prueba

,
(A) 5. (B) 10. (C) 100. (D) 25. (E) 50.

Solución 1. Los números de la lista son

$$1,\ 2,\ 4 = 2^2,\ 5,\ 10 = 2\cdot 5,\ 20 = 2^2\cdot 5,\ 25 = 5^2,\ 50 = 2\cdot 5^2,\ 100 = 2^2\cdot 5^2.$$

Entonces el producto de estos nueve números es $2^9 5^9 = (10^3)^3 = 1000^3$. Por tanto el producto de los números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal es 1000. Entonces, debajo de 4 necesariamente debe estar 5. Notemos que 100 no puede estar en la fila donde está el 50 ni donde está el 4, debe estar en la fila donde está el 5. No puede estar en la esquina izquierda de abajo porque hay problemas con el 50 en la diagonal secundaria. Por tanto, 100 está al lado de 5 y 2 está en la esquina izquierda de abajo. Además 10 está en la casilla del centro para que los números de la diagonal secundaria sea 1000. Así, en la segunda columna necesariamente 1 está en la primera casilla. Por tanto, 20 en la primera casilla de la primera fila. Finalmente 25 está en la segunda fila de la primera columna.

Solución 2. Según condición del problema cada columna tiene el mismo producto, por tanto debe ser igual a la raíz cúbica del producto de todos los números, es decir 1000. Así debajo del número 4 tiene que estar el número 5, en la fila del número 4 también el producto debe ser 1000, y la única forma de conseguirlo es escribiendo los números 25 y 10. Para que el producto de la diagonal donde esta el 50 sea igual a 1000 la única posibilidad es que se escriba 10 en el centro, entonces 2 va en la esquina y 1 va arriba de 10. La figura completa queda de la siguiente manera:

20	1	50
25	10	4
2	100	5

Por tanto el número que se debe escribir en el cuadrado con el signo de interrogación es 25.

$\boxed{\text{Respuesta (D) 25}}$

17. Considere la ecuación cuadrática $x^2 - 99x + t = 0$. Si las dos raíces de la ecuación son números primos, entonces la suma de los dígitos de t es:

Solución 1. Por propiedades de las raíces de las ecuaciones cuadráticas, la suma de las raíces es 99 y ambos son primos, necesariamente uno es par, es decir 2. El otro es 97. Entonces

$$(x-2)(x-97) = x^2 - 99 + t.$$

Entonces $t = (-2)\times(-97) = 194$, y la suma de sus dígitos es $1+9+4 = 14$.

β

Beta
2da.
Prueba

Solución 2. Consideremos la ecuación $x^2 - 99x + t = 0$ por la fórmula general

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = \frac{99 \pm \sqrt{b^2 - 4t}}{2},$$

ya que las soluciones de la ecuación son números primos, entonces por la última ecuación tenemos que una de las soluciones tiene que ser un número primo par es decir 2.
Por otro lado tenemos las siguientes ecuaciones:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 99$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = t$$

$$x_1 = 2$$

Resolviendo el sistema $x_2 = 97$ así $t = 194$. Luego la suma de los dígitos de t es 14

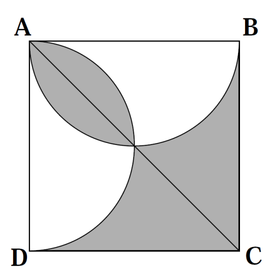
$\boxed{\text{Respuesta } 14}$

18. Considere el siguiente conjunto conformado por siete números $\{-9, -5, -4, -3, -1, 0, 5\}$. De los siete números se escogen seis y se los agrupan por parejas, de tal forma que la suma de cada pareja fuera la misma. Entonces el número que no se escogió es:

Solución. Si vemos el conjunto $\{-9, -5, -4, -3, -1, 0, 5\}$ podemos ver que hay 5 impares y 2 pares, no podemos dejar fuera un par. De esta forma 0 y -4 están juntos, la suma de esta pareja es -4 y la suma de las demás parejas debe ser -4. Por tanto las únicas posibilidades son -9 con 5 y -1 con -3. Así el número que no se escogió es -5.

$\boxed{\text{Respuesta } -5}$

19. Considere la figura en la que se muestra un cuadrado $ABCD$ y dos semicírculos con diámetros AB y AD. Si $AB = 16$. Entonces el área de la región sombreada es:

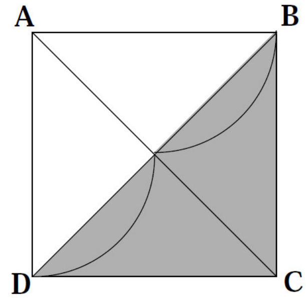


Solución. Consideremos la siguiente figura:

β

Beta
2da.
Prueba

,



En la que se observa que el área sombreada es igual a la mitad del área del cuadrado: 128

Respuesta 128

20. En la olimpíada paceña de matemática se encontraron dos amigos, Carlos y Luis. Carlos y Luis compitieron resolviendo 100 problemas. Algunos problemas fueron resueltos por lo dos, pero otros problemas no fueron resueltos por ninguno de los dos.

    Por cada problema resuelto, el primero en resolverlo obtiene 4 puntos y, en caso que lo hubieran resuelto los dos, el segundo obtiene 1 punto. Si cada uno de ellos resolvió 60 problemas y entre los dos lograron 393 puntos.

    La cantidad de problemas que resolvieron en común es:

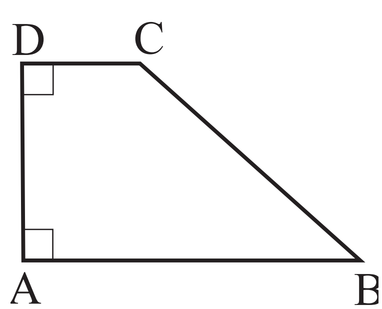
    Solución. Sea t la cantidad de problemas que resolvieron en común. Por cada problema que resuelvan en común se suman 5 puntos a la cuenta total. Por tanto generamos la ecuación que da el total de puntos.

$$5t + 4(60 - t) + 4(60 - t) = 480 - 3t$$

    Y según datos $480-3t = 393$ entonces $t = 29$. así la cantidad de problemas que resolvieron es 29.

Respuesta 29

21. Considere la figura. Los cuatro lados tienen longitudes enteras y su área es de 686 m^2. Si $AD = 28$ m y $CB = AB$. El perímetro de la figura es:



β

Beta
2da.
Prueba

’

Solución. Sea $CD = y$, $CB = AB = x$. Considere el segmento CE perpendicular al segmento AB en E. Por tanto $AE = y$, $EB = x-y$. Como $AD = 28$ entonces $CE = 28$. por dato, el área de la figura es 686, se tiene $28y + \frac{28(x-y)}{2} = 686$, así $y = 49 - x$. Por otro lado, aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos $x^2 = 28^2 + (x-y)^2$ así $784 + (x - 49 + x)^2 = x^2$ entonces $3x^2 - 196x + 3185 = 0$ cuyas soluciones son $x = 35$ ó $x = \frac{91}{3}$, como los lados tienen longitud entera entonces $x = 35$. Así $y = 14$, así el perímetro es $28 + 14 + 35 + 35 = 112$ en metros.

$\boxed{\text{Respuesta } 112\,m}$.