$\gamma$

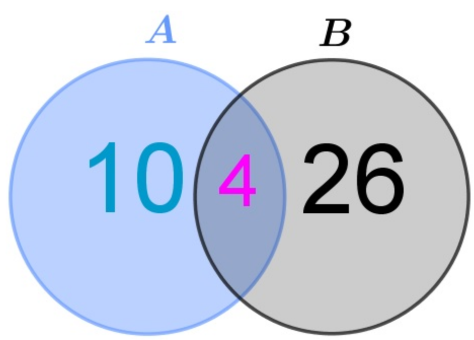
**1ra.**
Prueba

# 9. Soluciones de la categoría $\gamma$

22. En una clase de 40 estudiantes, 14 tienen una tablet y 30 tienen un celular inteligente. ¿Cuántos estudiantes tienen ambos aparatos, si se sabe que todos tienen al menos uno de los dos?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

**Solución:** Consideremos con $A$ el conjunto de los estudiantes que tiene una tablet, y $B$ el conjunto de los estudiantes que tiene un celular inteligente.




En el gráfico podemos apreciar la cantidad de elementos que se encuentran en el conjunto $A$, en $B$ y en la intersección de $A$ y $B$. Por tanto la cantidad de estudiantes que tienen ambos aparatos es 4.

Respuesta (C) 4

23. En un Curso de 28 estudiantes la profesora debe mandar dos estudiantes en representación al curso formado por una niña y un niño, si se sabe que hay 15 niñas y 13 niños. ¿De cuántas maneras puede formar a los representantes?

(A) 28 (B) 195 (C) 200 (D) 100 (E) 190

**Solución:** Para mandar dos estudiantes, una niña puede ir con cualquier de los 13 niños; esto significa que hay 13 maneras de representar. Sin embargo tenemos 13 niñas, entonces por el principio de la multiplicación podemos afirmar que las maneras que puede formar a los representantes es de $14 \times 13 = 195$ maneras.

$\boxed{\text{Respuesta (B) } 195}$

24. Sonia escribe cuatro números en la pizarra: 5, 7, $x$, 17. Los promedios de cada dos números de estos cuatro números son $6, 8, 9, 11, 12$ y 14. ¿Cuál es el promedio de los cuatro números que escribió Sonia?

(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25 (E) 26

**Solución.** Al sacar los promedios de 4 números se usa cada uno de ellos exactamente tres veces. Entonces al realizar la suma de los promedios posibles $6+8+9+11+12+14 = 60$ sabemos que

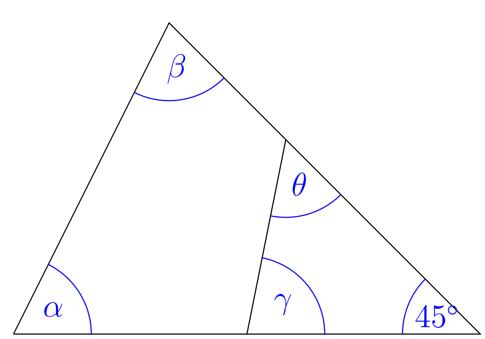
$$60 = 3\left(\frac{5}{2} + \frac{7}{2} + \frac{x}{2} + \frac{17}{2}\right) \tag{1}$$

De donde $40 = 5 + 7 + x + 17$, así $x = 11$. Entonces, el promedio de los cuatro números es

$$\frac{5+7+11+17}{4} = 10.$$

$\boxed{\text{Respuesta (A) } 10}$

25. En la figura, ¿Cuál es el valor de $\alpha + \beta + \theta + \gamma$?.



(A) 135° (B) 270° (C) 405° (D) 300° (E) 600°

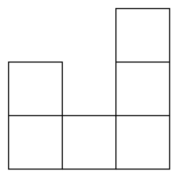
**Solución.** La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, entonces $\alpha+\beta+45° = 180°$ y $\theta+\gamma+45° = 180°$. Sumando las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta+45°)+(\theta+\gamma+45°) &= 180°+180° \\
\alpha+\beta+\theta+\gamma &= 360°-90°
\end{aligned}
$$

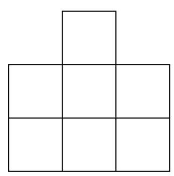
Así lo buscado es:

$$\boxed{\text{Respuesta (B)} \quad \alpha+\beta+\theta+\gamma = 270°}$$

26. Se tomaron dos fotos de una construcción hecha de cubos, una del costado izquierdo de la construcción:



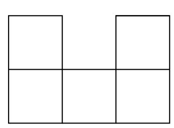
Otra foto de frente:



¿Cuál es el máximo número posible de cubos que se pueden usar en la construcción?

(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

**Solución.** En los costados lo máximo que puede haber es lo que se muestra en la figura, aquí abajo pues la pieza superior sólo se ve en el centro. Entonces el máximo es $5+5+6 = 16$.



$$\boxed{\text{Respuesta (E) 16}}$$

27. La suma de cuatro números enteros positivos diferentes es 100. El mayor de estos cuatro números enteros es $m$. El valor más pequeño posible de $m$ es

(A) 25 (B) 26 (C) 27 (D) 28 (E) 94

**Solución.** Notamos que $100/4 = 25$. Entonces $m$ no puede ser 25 porque entonces los otros no alcanzan para sumar 75 porque son diferentes. Veamos que $m$ tampoco es 26, porque entonces la mayor suma posible con número diferentes sería $26+25+24+23 = 99$ y no es suficiente. Veamos que $m = 27$ sí es posible, por ejemplo $27 + 26 + 24 + 23 =$.

$\boxed{\text{Respuesta (C) 27}}$

28. Sea

$$1, 8, 27, 64, \ldots$$

la sucesión de los cubos de los enteros positivos. El número $20^{21}$ es un término de esta sucesión. ¿Cuál es el término de la sucesión que está después de $20^{21}$?

(A) $20^{22}$ (B) $(20^7 + 1)^3$ (C) $(20^{21} + 1)^3$ (D) $21^{21}$ (E) $(20^7)^3 + 1$

**Solución.** Observamos que $20^{21} = (20^7)^3$, así que el cubo siguiente es $(20^7 + 1)^3$.

$\boxed{\text{Respuesta (B) } (20^7 + 1)^3}$

29. En un campeonato de futsal participaron cuatro equipos, cada equipo jugó cotra todos los demás una sola vez. Cada equipo obtuvo 3 puntos por partido ganado, 1 puntos por partido empatado y 0 puntos por partido pedido. La puntuación total final fue: 7 puntos para el equipo $A$, 4 puntos para el equipo $B$, 3 puntos para el equipo $C$ y 3 puntos para el equipo $D$. ¿Cuál fue el resultado del partido de $A$ contra $B$?

(A) Ganó $A$.

(B) Ganó $B$.

(C) Empataron.

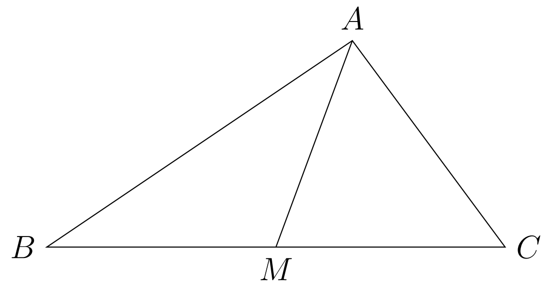
(D) Depende del partido entre $B$ y $C$.

(E) Depende del resultado entre $C$ y $D$.

**Solución.** El equipo $A$ debe haber ganado dos juegos y empatado uno. Como $B$ no pudo empatar 4 juegos, debe haber ganado uno, empatado uno y perdido uno. Entonces $C$ y $D$ deben haber ganado un juego cada uno y perdido los otros dos. Así $A$ debe haber empatado con $B$.

$\boxed{\text{Respuesta (C) Empataron}}$

30. En el diagrama: $M$ es el punto medio de $BC$, $\angle AMC = 40°$ y $\angle ABC = 20°$. Encontrar el valor de $\angle ACB$.




(A) 70° (B) 60° (C) 50° (D) 80° (E) 85°

**Solución.** Notamos que $\angle AMB = 180^\circ - \angle AMC = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. En un triángulo, la suma de los ángulos interiores es 180°, entonces

$$180^\circ = \angle ABM + \angle AMB + \angle BAM = 20^\circ + 140^\circ + \angle BAM.$$

Así, $\angle BAM = 20^\circ$. Entonces $ABM$ es un triángulo isósceles porque tiene dos ángulos iguales, por tanto $AM = BM = MC$. En particular el triángulo $AMC$ también es isósceles porque dos de sus lados miden lo mismo. Por tanto

$$180^\circ = \angle AMC + 2\angle ACB = 40^\circ + 2\angle ACB,$$

de donde $\angle ACB = 70^\circ$.

$\boxed{\text{Respuesta (A) } 70^\circ}$

31. Una sucesión de 567 números enteros positivos consecutivos tiene una suma que es un cubo perfecto. Encuentre la suma positiva más pequeña posible de estos 567 números.

(A) 343 (B) 9261 (C) 740088 (D) 250047 (E) $567^3$

**Solución.** Sea $m+1, m+2, \ldots, n-1, n$ los 567 números enteros positivos. Entonces queremor encontrar el menor $a$ entero positivo tal que

$$a^3 = (m+1) + (m+2) + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2}.$$

Entonces

$$2a^3 = n^2 + n - m^2 - m = (n-m)(n+m) + (n-m),$$

de donde

$$(n-m)(m+m+1) = 2a^3.$$

Pero $n - m = 567 = 3^4 \cdot 7$. Entonces

$$3^4 \cdot 7(n+m+1) = 2a^3.$$

Por tanto, el menor candidato para $a$ es $a = 3^2 \cdot 7 = 63$ siempre que el sistema

$$\begin{cases} n - m &= 567 \\ n + m + 1 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \ = 882 \end{cases}$$

tenga soluciones enteras y positivas. Este es el caso, $m = 157$ y $n = 724$. Es decir,

$$158 + 159 + \cdots + 724 = 63^3 = 250047.$$

$\boxed{\text{Respuesta (D) 250047}}$

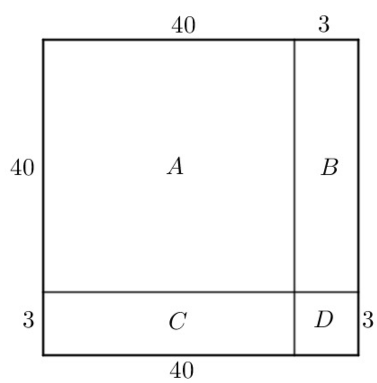
32. Las casillas de una cuadrícula de $43 \times 43$ se colorean con 4 colores, llamados 1, 2, 3 y 4, siguiendo el patrón indicado en la figura. ¿Qué color se usó más que los otros tres?

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | | $\cdots$ | |
| 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | | $\cdots$ | |
| 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | | | $\cdots$ | |
| 4 | 1 | 2 | 3 | | | | $\cdots$ | |
| 1 | 2 | 3 | | | | | $\cdots$ | |
| 2 | 3 | | | | | | $\cdots$ | |
| | | | | | | | $\cdots$ | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| | | | | | | | $\cdots$ | |

(A) 1 (C) 3 (E) Ninguno

(B) 2 (D) 4

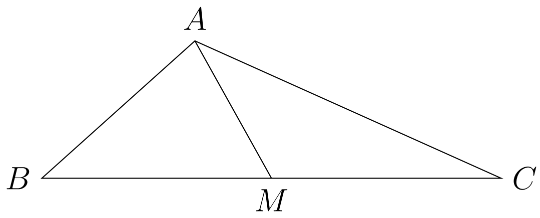
**Solución:** Dividamos el cuadrado en 4 rectángulos $A$, $B$, $C$ y $C$ uno de $40 \times 40$, otro de $3 \times 40$, otro de $40 \times 3$ y otro $3 \times 3$, como se indica en la figura. En las regiones $A$. $B$ y $C$ algún lado es múltiplo de 4, así que aparecen todos los colores igualmente. El cuadrado $D$ es como se indica en la figura, así que el color que más aparece es el 3.




| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 1 |

$\boxed{\text{Respuesta (C) 3}}$

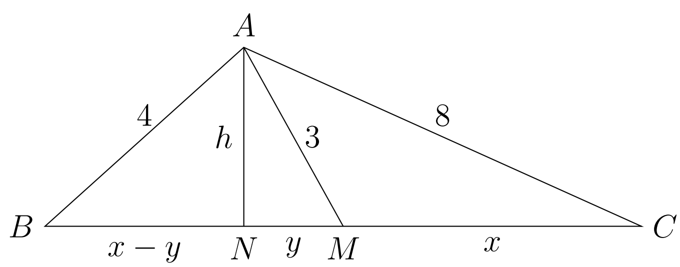
33. En la figura:




$M$ es el punto medio de $BC$, $AM = 3$, $AB = 4$ y $AC = 8$. ¿Cuál es el valor de $BC$?

(A) $2\sqrt{29}$
(B) $2\sqrt{31}$
(C) 10
(D) $4 + 2\sqrt{13}$
(E) No hay suficiente información para encontrar $BC$.

**Solución.** Sea $N$ el pie de la altura $h$ del triángulo $ABC$. Sean $AM = MC = x$ y $NM = y$. Entonces tenemos




Usando el Teorema de Pitágoras tres veces, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} h^2 + (x+y)^2 &= 64 \\ h^2 + y^2 &= 9 \\ h^2 + (x-y)^2 &= 16 \end{cases}$$

Restando dos veces la segunda ecuación de la suma de la primera y tercera ecuación obtenemos $2x^2 = 62$, de donde $x\sqrt{31}$. Por tanto $BC = 2\sqrt{31}$.

$$\boxed{\text{Respuesta (B) } 2\sqrt{31}}$$

34. Marycel elige tres número enteros positos $m, n, p$.
Hebe calcula $m + \dfrac{n}{p}$ y encuentra 66.
Hernán calcula $\dfrac{m}{p} + n$ y encuentra 159.
Patricia calcula $\dfrac{m+n}{p}$. ¿Qué número encontró Patricia?

(A) 225 (B) 14 (C) 202 (D) 224 (E) 15

**Solución.** Notamos que $\frac{n}{p}$ es entero, por tanto $n = Np$, similarmente $m = Mp$, con $N, M$ enteros. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} pM + M &= 66 \\ M + pN &= 159 \end{aligned}$$

Sumando $(M + N)(p + 1) = 225 = 15^2$. Entonces $M + N$ es un divisor de 225 menor que 225 porque $p + 1$ es mayor que 1. De la lista solamente 15 es posible.

$\boxed{\text{Respuesta (E) 15}}$