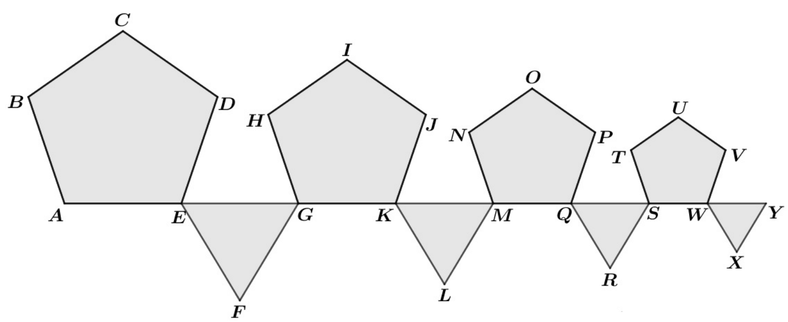
6. Soluciones de la categoría γ

γ

Gama
2da.
Prueba

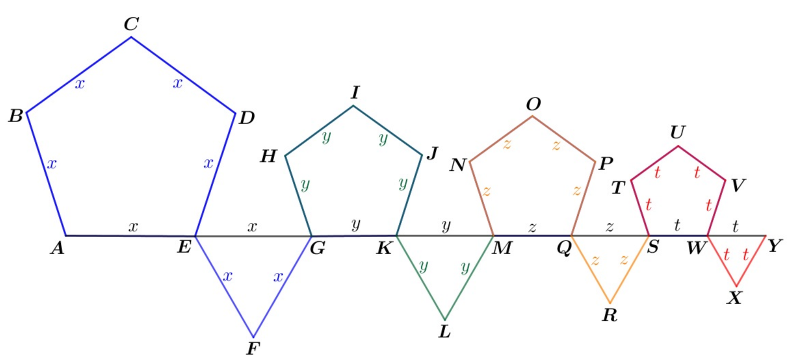
22. En la figura los pentágonos regulares y triángulos equiláteros tienen un lado sobre el segmento AY de 18 cm. de manera que $DE = EF$, $JK = KL$, $PQ = QR$ y $VW = WX$ (ver figura). Hallar la longitud de la trayectoria formada por los puntos

$$ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXY$$



(A) 54 (B) 108 (C) 144 (D) 106 (E) 90

Solución. Por ser el pentágono regular y el triángulo isósceles y $DE = EF$ la medida de cualquiera de los lados de estas figuras es la misma, llamemos x, el cual se repite seis veces en la trayectoria que se desea encontrar(color azul), lo mismo ocurre con y, z y t (ver figura).



Además la longitud del segmento $AY = 2x + 2y + 2z + 2t = 18$ y la trayectoria, que nos pide hallar su longitud, es: $6x + 6y + 6z + 6z = 3(2x + 2y + 2z + 2t) = 3(18) = 54$

$$\boxed{\text{Respuesta (A) 54}}$$

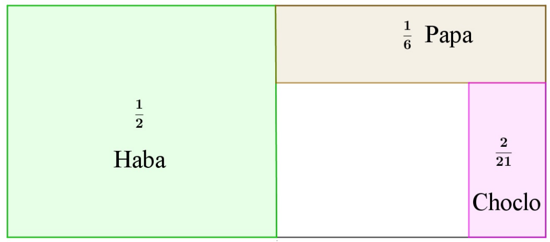
23. En la mitad de un terreno se siembra haba, en la tercera parte del resto se siembra papa y en las $2/7$ partes de lo que queda se siembra choclo ¿Qué fracción del terreno no sembrada con papa, quedo sin sembrar?.

γ

Gama
2da.
Prueba

’ (A) 2/21 (B) 1/6 (C) 5/14 (D) 10/21 (E) 2/7

Solución. Consideremos al terreno como el rectángulo mas grande de la figura:



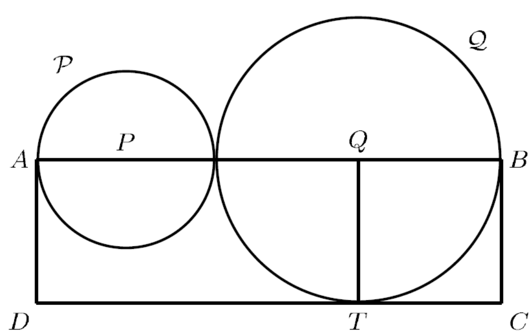
En la mitad del terreno se siembra haba (color verde) y es expresado por: $\frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$.
En la tercera parte del resto se siembra papa (color café), esto es expresado por: $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$.
Y en las 2/7 partes de lo que queda se siembra choclo (color morado), esto es: $\frac{2}{7}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{21}$.
Además la parte que no esta sembrada tiene la fracción de 5/21 (color blanco). Y la parte que no esta sembrada de papa tiene la fracción de $1/2 + 5/21 + 2/21 = 5/6$. Ahora para responder la pregunta, utilizamos la regla de tres simple:

$$\begin{array}{ccc} \frac{5}{6} & \rightarrow & 1 \\ \frac{5}{21} & \rightarrow & \text{x} \end{array}$$

Por tanto la fracción que quedo sin sembrar del terreno no sembrada con papa es $x = 2/7$.

Respuesta (E) 2/7

24. Considere la figura, P y Q son los centros de los círculos tangentes $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, respectivamente. La recta PQ corta al círculo $\mathcal{P}$ en A y a $\mathcal{Q}$ en B como se muestra en la figura. El rectángulo $ABCD$ es tangente al círculo $\mathcal{Q}$ en T. Si el área de $ABCD$ es 15. ¿Cuál es el área del triángulo PQT?



(A) $\frac{\pi}{2}$. (B) $\frac{15}{2}$. (C) $\frac{\pi}{4}$. (D) $\frac{15}{4}$. (E) $2\sqrt{15}$

γ

Gama
2da.
Prueba

,

Solución. Sean r y R los radios de P y Q respectivamente. Ahora consideremos el rectángulo $ABCD$, que tiene área igual a $(2r+2R)R$, que según dato es 15, entonces $(2r+2R)R = 15$ luego $(r+R)R = \dfrac{15}{2}$. Así el área del triángulo PQT es:

$$\frac{(r+R)R}{2} = \frac{15}{4}$$

Respuesta (D) 15/4

25. Consideremos $\triangle$ como una operación entre dos números. Dados dos números x, y la operación triángulo devuelve un número no negativo $x \triangle y$. Se sabe que para cualesquiera números a, b se cumple que $(b \triangle a)^2 = a(a \triangle b)$. Hallar

$$S = 24 \triangle 3$$

(A) 5 (C) -2 (E) No es posible.

(B) 6 (D) 3

Solución. Primeramente encontraremos $b \triangle a$ en términos de b y a

$$\begin{aligned}
(b \triangle a)^2 &= a(a \triangle b) \\
(b \triangle a)^4 &= a^2(a \triangle b)^2 \\
(b \triangle a)^4 &= a^2 b(b \triangle a) \\
(b \triangle a)^3 &= a^2 b \\
b \triangle a &= \sqrt[3]{a^2 b}
\end{aligned}$$

Luego: $24 \triangle 3 = \sqrt[3]{3^2 \cdot 24} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2^3} = 6$

Respuesta (B) 6

26. Considere el número $E = 4^n + 3^n + 2^n + 1^n$, donde n es entero positivo. ¿Cual es el valor de n para que E no sea múltiplo de 5?

(A) 2018 (B) 2019 (C) 2020 (D) 2021 (E) 2022

Solución. Consideremos la siguiente tabla que aglutina todos los casos de los últimos dígitos de las potencias. Luego se repiten en bloques de 4.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
1^n	1	1	1	1	1	1	1	1
2^n	2	4	8	6	2	4	8	6
3^n	3	9	7	1	3	9	7	1
4^n	4	6	4	6	4	6	4	6
E	0	0	0	4	0	0	0	4

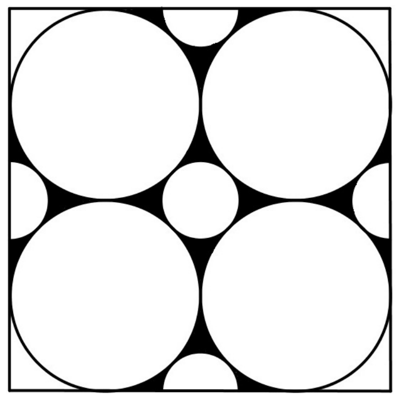
γ

Gama **2da.** Prueba

Para que un número sea múltiplo de 5, el último dígito debe ser 0 o 5. Para que $4^n + 3^n + 2^n + 1^n$ no sea múltiplo de 5 se nota que n debe ser múltiplo de 4 y de las opciones solo cumple 2020.

Respuesta (C) 2020

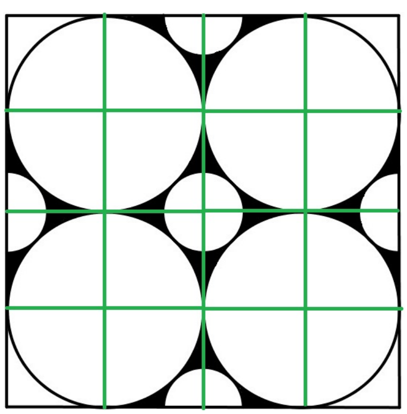
27. Cuatro fichas circulares iguales se tocan entre si, tal y como se ve en el cuadrado de lado a, ver la figura. Encontrar el valor del área de la parte sombreada.



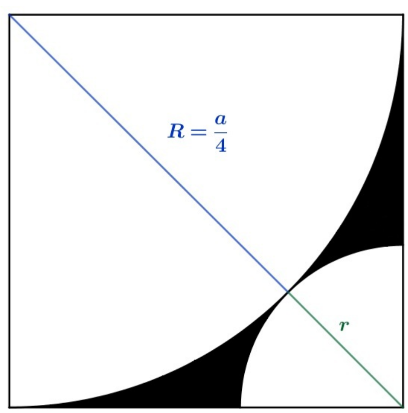
(A) $\frac{3a^2}{8}(2 - 2\pi + \pi\sqrt{2})$ (C) $\frac{3a^2}{8}\pi\sqrt{2}$ (E) $\frac{3a^2\pi}{8}$

(B) $\frac{3a^2}{8}(2 + \pi\sqrt{2})$ (D) $\frac{3a^2}{4}$

Solución. Dividimos a la figura en 16 cuadrados pequeños iguales (ver imagen (a)) y extraemos un cuadrado pequeño (ver imagen (b)).



(a) Dividido en 16 cuadrados



(b) Un sólo cuadrado

Primero hallemos el radio de la circunferencia central, según la gráfica y el teorema de Pitágoras podemos concluir:

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} - \frac{a}{4} = \frac{a}{4}(\sqrt{2} - 1)$$

γ

Gama **2da.** Prueba

,

El área de la región sombreada de la imagen (b) es:

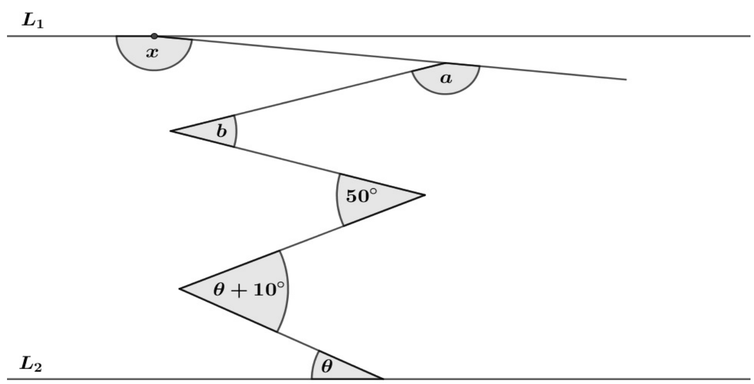
$$\left(\frac{a}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\left[\pi\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{a}{4}(\sqrt{2}-1)\right)^2\right] = \left(\frac{a}{4}\right)^2\left(1-\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)$$

Ahora el total del área sombreada es doce veces el resultado anterior, entonces:

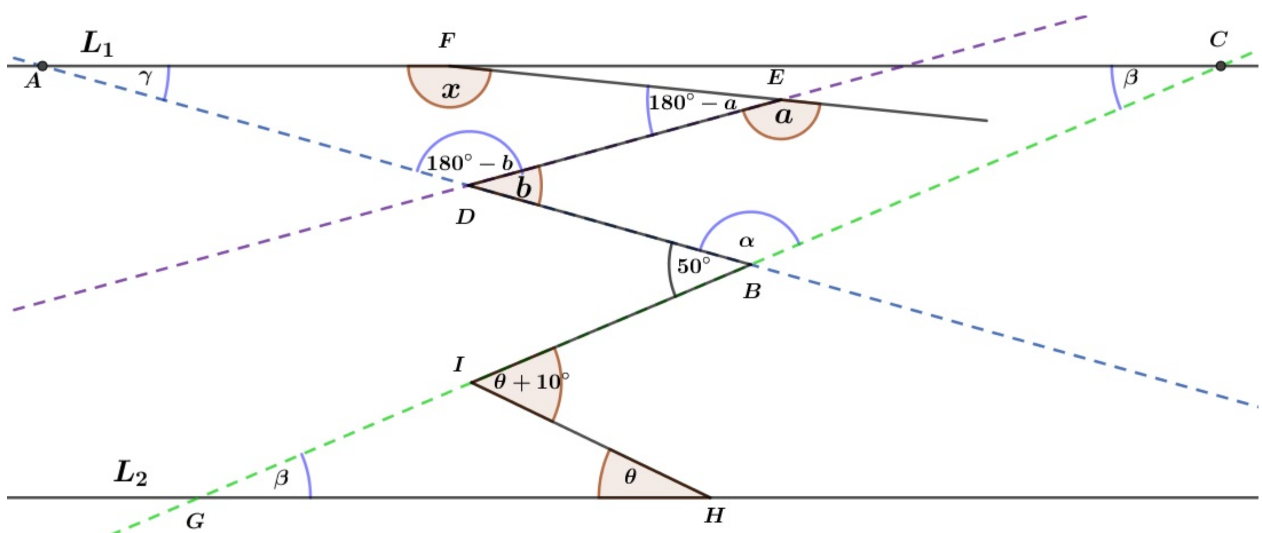
$$12\left(\frac{a}{4}\right)^2\left(1-\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right) = \frac{3a^2}{8}(2-2\pi+\sqrt{2}\pi)$$

Respuesta (A) $\frac{3a^2}{8}(2-2\pi+\pi\sqrt{2})$

28. En la gráfica se tiene que $a+b=170°$ y L_1 y L_2 son paralelas. Entonces su valor del ángulo x en grados es:



Solución. Primeramente trazamos rectas, como se ve en la siguiente imagen



EL ángulo exterior $\theta + 10$ es suma de los ángulos interiores del triángulo GHI, es decir $\theta + 10° = \beta + \theta$, de aquí $\beta = 10°$. Por suplementos de ángulos $\alpha = 130°$, lo mismo para

γ

Gama
2da.
Prueba

los ángulos $(180° - b)$ y $(180° - a)$. Ahora en el triángulo ABC, sabemos que todos sus ángulos interiores suman $180°$, esto es $\gamma + \alpha + \beta = 180$, sustituyendo los valores conocidos de α y β, se obtiene $\gamma = 40°$. Luego la suma de todos los ángulos internos del cuadrilátero $ADEF$ es $360°$, de tal manera se obtiene la siguiente ecuación:

$$x + \gamma + (180 - b) + (180 - a) = 360$$

Por tanto, resolviendo la anterior ecuación tenemos $x = 130$.

Respuesta 130

29. Si α y β son soluciones de la ecuación $x^2 + 3x - 3 = 0$. Encontrar el valor de

$$\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2}$$

Solución. Una ecuación cuadrática en x es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, siendo α y β soluciones de la ecuación, la suma y producto de sus raíces esta dado por:

$$\alpha + \beta = -\tfrac{b}{a} \quad \text{y} \quad \alpha \cdot \beta = \tfrac{c}{a}$$

Ahora para la ecuación $x^2 + 3x - 3 = 0$ con $a = 1$, $b = 3$ y $c = -3$, se tiene la suma y producto de sus raíces $\alpha + \beta = -3$ y $\alpha \cdot \beta = -3$.

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= -3 \\
(\alpha + \beta)^3 &= (-3)^3 \\
\alpha^3 + 3\alpha^2 \cdot \beta + 3\alpha \cdot \beta^2 + \beta^3 &= -27 \\
\alpha^3 + \beta^3 &= -27 - 3\alpha^2 \cdot \beta - 3\alpha \cdot \beta^2 \\
\alpha^3 + \beta^3 &= -27 - 3\alpha \cdot \beta(\alpha + \beta) \\
\alpha^3 + \beta^3 &= -27 - 3(-3)(-3)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha^3 + \beta^3 = -54} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \beta &= -3 \\
(\alpha \cdot \beta)^2 &= (-3)^2 \\
\alpha^2 \cdot \beta^2 &= 9
\end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha^2 \cdot \beta^2 = 9} \quad (2)$$

Luego dividiendo la ecuación (1) entre (2) tenemos $\dfrac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2 \cdot \beta^2} = \dfrac{-54}{9}$, de aquí $\dfrac{\alpha}{\beta^2} + \dfrac{\beta}{\alpha^2} = -6$

Respuesta -6

30. En una reunión social asistieron 8 mujeres y 10 varones. Todos se saludan entre sí.

   (a) Sea S el número de saludos que se realizan entre todos los presentes.

   (b) Sea P el número de posibles maneras que puede formar parejas (varón y mujer), para iniciar el baile.

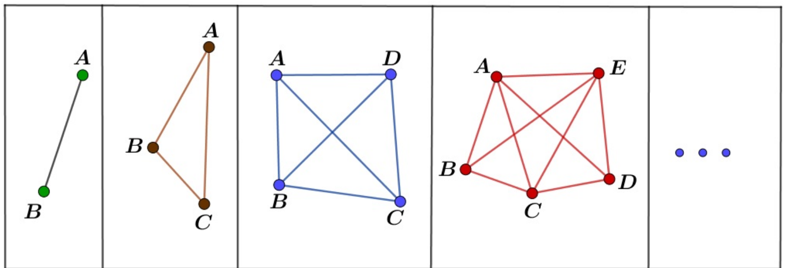
   El resultado de $S - P$ es:

   Solución. Realizamos la siguiente gráfica:

γ

Gama
2da.
Prueba

,



1 *Saludo*	3 *Saludos*	6 *Saludos*	10 *Saludos*	...
$\binom{2}{2}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{5}{2}$	...

(a) Observemos el gráfico, las líneas que unen los puntos representan los saludos y las letras a las personas; cuando hay dos personas tenemos un saludo, cuando hay tres personas tenemos tres saludos, cuando hay cuatro personas tenemos seis saludos,y como hay 18 persona en una reunión social (8 mujeres y 10 varones), entonces el número de saludos de 18 personas es equivalente al número de combinaciones de 18 objetos tomados de 2. Esto es

$$\binom{18}{2} = \frac{18!}{2! \times (18-2)!} = \frac{18 \times 17 \times 16!}{2! \times 16!} = 153$$

luego $S = 153$.

(b) Consideremos a una mujer, ella tiene 10 posibles candidatos varones para formar pareja, este proceso se repite para cada una de las 8 mujeres, entonces las posibles parejas son $8 \times 10 = 80$, luego $P = 80$

Así la respuesta es: $S - P = 73$

Respuesta 73

31. Considere el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. ¿De cuántas formas se puede dividir el conjunto A en dos conjuntos tal que la suma de los elementos de cada uno de ellos sea la misma?

Solución. Si sumamos los elementos del conjunto A tenemos 28, entonces la suma de cada conjunto tiene que ser 14, por tanto tenemos 4 formas que son:

$$\{7,1,6\}; \quad \{2,3,4,5\}$$
$$\{7,2,5\}; \quad \{1,3,4,6\}$$
$$\{7,3,4\}; \quad \{1,2,5,6\}$$
$$\{7,1,2,4\}; \quad \{3,5,6\}$$

Respuesta 4

γ

Gama
2da.
Prueba

32. Considere la ecuación cuadrática en x: $t^2 - 212 = x(x+1)$, esta ecuación tiene dos soluciones enteras distintas. Si t es un entero positivo, hallar la cantidad de todos los posibles valores de t.

Solución. La ecuación cuadrática se la puede escribir como $x^2 + x + 212 - t^2 = 0$.
Las soluciones son $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{\triangle}}{2}$, como las soluciones deben ser enteras y distintas, entonces $\triangle > 0$ tal que $\triangle = m^2$ para algún m entero positivo y $-1 \pm m$ sea par, esto es m sea impar.
Así debe cumplir $1 - 4(212 - t^2) = m^2$ esto es $4t^2 - m^2 = 847$ de donde $(2t-m)(2t+m) = 7 \cdot 11^2$ esta ultima ecuación genera tres posibilidades:

- $(2t - m) = 7 \cdot 11^2$ y $(2t + m) = 1$ entonces $t = 212$ y $m = 423$
- $(2t - m) = 7 \cdot 11$ y $(2t + m) = 11$ entonces $t = 22$ y $m = 33$
- $(2t - m) = 7$ y $(2t + m) = 11^2$ entonces $t = 32$ y $m = 57$

Así $t = 212$, $t = 22$ y $t = 32$.
Por tanto la cantidad de todos los posibles valores de t es 3

$$\boxed{\textbf{Respuesta } 3}$$

33. Sean x, y, z números enteros positivos. Hallar la cantidad de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} xy + z = 34 \\ x + yz = 29 \end{cases}$$

Solución. Si restamos las ecuaciones, tenemos: $xy + z - x - yz = 5$, factorizando tenemos $(y-1)(x-z) = 5$, como x, y, z son enteros positivos entonces $y - 1$ es 1 ó 5, entonces $y = 2$ ó $y = 6$, ahora analizamos caso por caso.

- Si $y = 2$ entonces obtenemos el sistema $2x + z = 34$, $x + 2z = 29$ cuyas soluciones son $x = 13$, $z = 8$.
- Si $y = 6$ entonces obtenemos el sistema $6x + z = 34$, $x + 6z = 29$ cuyas soluciones son $x = 5$, $z = 4$.

por tanto la cantidad de soluciones del sistema son 2 que son $(13, 2, 8)$ y $(5, 6, 4)$

$$\boxed{\textbf{Respuesta } 2}$$

34. Considere la siguiente sucesión de números:

$$\frac{20}{21}, \frac{20}{22}, \frac{20}{23}, \frac{20}{24}, \ldots, \frac{20}{2001}, \frac{20}{2002}, \frac{20}{2003}$$

γ

Gama
2da.
Prueba

,

La cantidad de fracciones que se pueden simplificar es:

Solución. Para que la fracción $\frac{20}{n}$ se pueda simplificar, el 2 ó el 5 deben dividir a n. Ahora calculamos la parte entera.

Tenemos $\left[\dfrac{2003}{2}\right] = 1001$ números divisibles por 2 y menores ó iguales a 2003.

Tenemos $\left[\dfrac{20}{2}\right] = 10$ números divisibles por 2 y menores ó iguales a 20.

Así $1001 - 10 = 991$ fracciones que se pueden simplificar al dividirlas por 2.

Razonando de forma similar tenemos $\left[\dfrac{2003}{5}\right] - \left[\dfrac{20}{5}\right] = 400 - 4 = 396$ fracciones que se puede simplificar al dividirlas por 5. Así el total tendríamos $991 + 396 = 1387$, a este número debemos restar aquellos que son divisibles por 2 y por 5, es decir divisibles por 10.

$\left[\dfrac{2003}{10}\right] - \left[\dfrac{20}{10}\right] = 200 - 2 = 198$ fracciones que se pueden simplificar al dividirlas por 10.

Finalmente tenemos $1387 - 198 = 1189$ fracciones que se pueden simplificar.

$\boxed{\textbf{Respuesta } 1189}$