Olimpiada Paceña de Matemática
Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática,
Facultad de Ciencias Puras y Naturales,
Universidad Mayor de San Andrés.

Cuadernillo de la Segunda Etapa de la 18va OPMat

Editado por

Hebe Condori Cauna
Hernán Laime Zanga

La Paz – Bolivia
2021

Índice general

Parte I

Enunciados

1. Enunciados de la categoría α

1. Si se eligen tres números del cuadro, uno de cada fila y uno de cada columna, y se suman, ¿cuál es el mayor valor que puede tener la suma?

10	11	12
13	14	15
16	17	18

(A) 36 (B) 39 (C) 42 (D) 45 (E) 51

2. En tres días María ganó 280 Bolivianos, si cada día ganó la mitad de lo que ganó el día anterior. ¿Cuánto ganó el tercer día?.

(A) 30 (B) 40 (C) 50 (D) 60 (E) 70

3. En una competencia de encestar de basketball, cada competidor lanza diez pelotas que están numeradas del 1 al 10. El número de puntos obtenidos por cada vez que encesta es igual al número de la pelota. Si un competidor falla exactamente dos lanzamientos, ¿cuál de los siguientes puntajes no es posible?

(A) 52 (B) 44 (C) 41 (D) 38 (E) 35

4. Si, $a^{\triangle} = \dfrac{a+2}{a-1}$ con $a \neq 1$, $b^{\square} = \dfrac{b^2-1}{b}$ con $b \neq 0$ y $c^{\bigcirc} = (c-1)^2$. Por ejemplo, $3^{\triangle} = \dfrac{3+2}{3-1} = \dfrac{5}{2}$. Hallar:

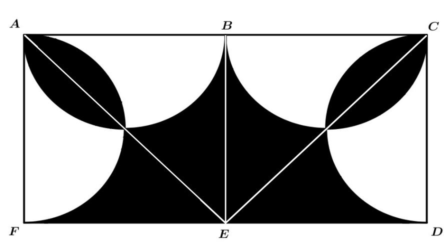
$$Z = ((2^{\triangle})^{\square})^{\bigcirc}$$

(A) 95/9 (B) 121/16 (C) 81/16 (D) 106/14 (E) 132/25

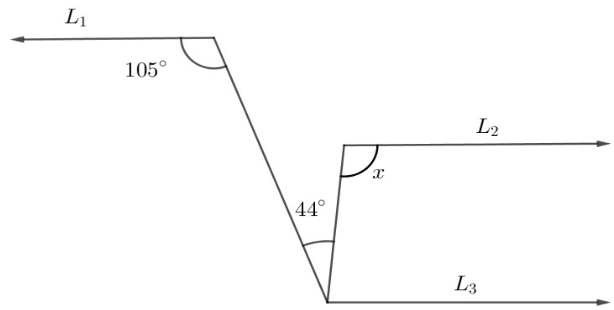
5. Hernán escribe en la pizarra todos los números positivos menores que 50, que tienen exactamente 4 divisores positivos. Calcular la suma de todos los números que escribió Hernán.

(A) 230 (B) 269 (C) 374 (D) 456 (E) 470

6. En la figura $ABEF$ y $BCDE$ son cuadrados iguales y se trazan los semicírculos de diámetros AB, AF, BC y CD. Si $AB = 2$, el área de la parte sombreada es:



7. En el siguiente gráfico, se cumple que L_1, L_2 y L_3 son paralelas. El valor del ángulo x en grados es igual a

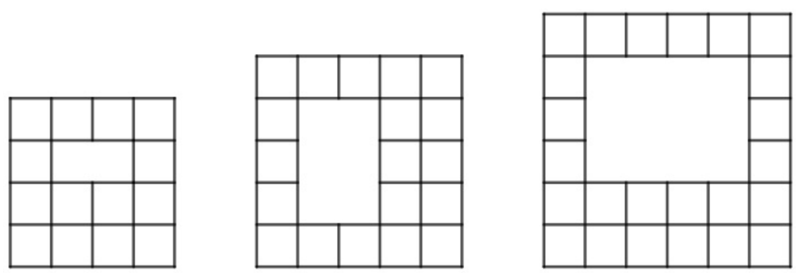


8. El valor de la suma

$$2021 - 2019 + 2017 - 2015 + 2013 - 2011 + \cdots + 5 - 3 + 1$$

es igual a:

9. Abajo se muestran las tres primeras figuras de una secuencia de figuras.



¿Cuántos cuadraditos de estos $\square$ hay en la séptima figura?

2. Enunciados de la categoría β

10. Sea la sucesión de números enteros:

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \ldots$$

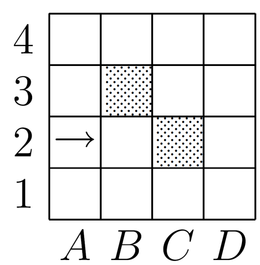
¿Cuál es el número que esta en la posición 2021?

(A) 61. (B) 62. (C) 63. (D) 64. (E) 65.

11. Una araña camina solo por las aristas de un cubo. Empieza en el vértice P, al final de la primera arista gira a la derecha, al final de la segunda arista gira a la izquierda y así sucesivamente va alternando giro a la derecha con giro a la izquierda. ¿Cuál es la cantidad de aristas que debe caminar para regresar por primera vez a P?.

(A) 6. (B) 12. (C) 15. (D) 18. (E) 24.

12. Daniela camina dentro de un tablero de 4×4 en los cuadrados blancos empezando en el cuadrado $A2$ y en el sentido de la flecha (ver figura). Daniela siempre va de frente a menos que se tope con un obstáculo (es decir, con la orilla del tablero o con un cuadro gris) en tal caso da vuelta a la derecha, sin embargo se detiene si al dar la vuelta a la derecha encuentra otra vez un obstáculo, ¿En que posición del tablero se detiene?.



(A) $B1$. (B) $A4$. (C) $D1$. (D) $C4$. (E) Nunca.

13. Arturo tiene un hijo que se llama Luis y un nieto que se llama Pedro. Arturo se da cuenta que su edad, la edad de su hijo y la edad de su nieto son tres números que cumplen las siguientes dos condiciones:

   (a) Al ser divididos por un número impar mayor que 1, el resultado no es un número entero.

   (b) Al sumar las tres edades se obtiene 100 años

¿Cuántos años tiene Luis?

(A) 28. (B) 16. (C) 32. (D) 64. (E) 4.

14. El reloj de Fernando esta retrasado por 12 minutos, pero el cree que está adelantado por 5 minutos. El reloj de Teresa esta adelantado por 5 minutos, pero ella cree que está retrasado por 10 minutos. Si Fernando cree que son las 13:00. ¿Qué hora cree Teresa que es?

(A) 12:48. (B) 12:52. (C) 13:28. (D) 13:32. (E) 13:42.

15. ¿Cuál de los siguientes números no puede escribirse como $x + \sqrt{x}$ para x un entero?

(A) 992. (B) 56. (C) 132. (D) 462. (E) 168.

16. Los números 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 y 100, se van a acomodar en el cuadrado de la figura, de forma que el producto de los tres números en cada fila, en cada columna y en cada diagonal sean iguales. Dos números ya se escribieron en el cuadrado. ¿Qué número se debe escribir en el cuadrado con el signo de interrogación?

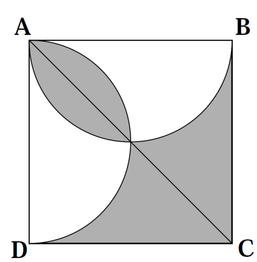
		50
?		4

(A) 5. (B) 10. (C) 100. (D) 25. (E) 50.

17. Considere la ecuación cuadrática $x^2 - 99x + t = 0$. Si las dos raíces de la ecuación son números primos, entonces la suma de los dígitos de t es:

18. Considere el siguiente conjunto conformado por siete números $\{-9, -5, -4, -3, -1, 0, 5\}$. De los siete números se escogen seis y se los agrupan por parejas, de tal forma que la suma de cada pareja fuera la misma. Entonces el número que no se escogió es:

19. Considere la figura en la que se muestra un cuadrado $ABCD$ y dos semicírculos con diámetros AB y AD. Si $AB = 16$. Entonces el área de la región sombreada es:

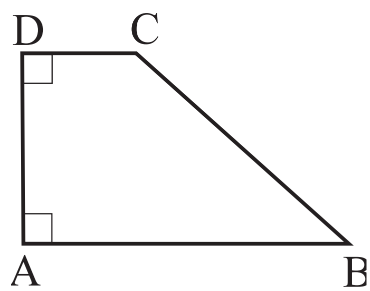


20. En la olimpíada paceña de matemática se encontraron dos amigos, Carlos y Luis. Carlos y Luis compitieron resolviendo 100 problemas. Algunos problemas fueron resueltos por lo dos, pero otros problemas no fueron resueltos por ninguno de los dos.

Por cada problema resuelto, el primero en resolverlo obtiene 4 puntos y, en caso que lo hubieran resuelto los dos, el segundo obtiene 1 punto. Si cada uno de ellos resolvió 60 problemas y entre los dos lograron 393 puntos.

La cantidad de problemas que resolvieron en común es:

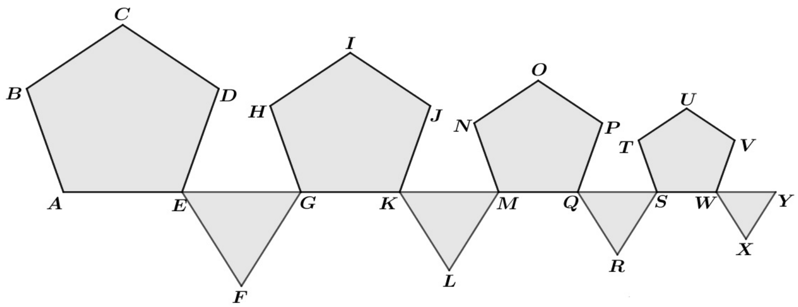
21. Considere la figura. Los cuatro lados tienen longitudes enteras y su área es de 686 m^2. Si $AD = 28\ m$ y $CB = AB$. El perímetro de la figura es:



3. Enunciados de la categoría γ

22. En la figura los pentágonos regulares y triángulos equiláteros tienen un lado sobre el segmento AY de 18 cm. de manera que $DE = EF$, $JK = KL$, $PQ = QR$ y $VW = WX$ (ver figura). Hallar la longitud de la trayectoria formada por los puntos

$$ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXY$$

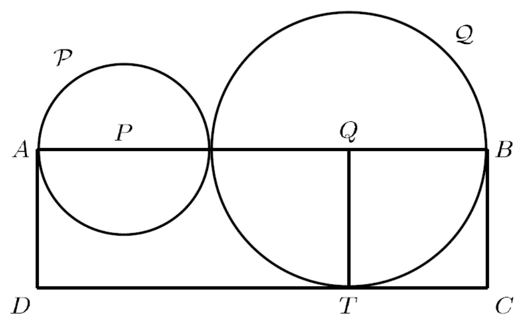


(A) 54 (B) 108 (C) 144 (D) 106 (E) 90

23. En la mitad de un terreno se siembra haba, en la tercera parte del resto se siembra papa y en las $2/7$ partes de lo que queda se siembra choclo ¿Qué fracción del terreno no sembrada con papa, quedo sin sembrar?.

(A) $2/21$ (B) $1/6$ (C) $5/14$ (D) $10/21$ (E) $2/7$

24. Considere la figura, P y Q son los centros de los círculos tangentes $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, respectivamente. La recta PQ corta al círculo $\mathcal{P}$ en A y a $\mathcal{Q}$ en B como se muestra en la figura. El rectángulo $ABCD$ es tangente al círculo $\mathcal{Q}$ en T. Si el área de $ABCD$ es 15. ¿Cuál es el área del triángulo PQT?



(A) $\dfrac{\pi}{2}$. (B) $\dfrac{15}{2}$. (C) $\dfrac{\pi}{4}$. (D) $\dfrac{15}{4}$. (E) $2\sqrt{15}$

25. Consideremos $\triangle$ como una operación entre dos números. Dados dos números x, y la operación triángulo devuelve un número no negativo $x \triangle y$. Se sabe que para cualesquiera números a, b se cumple que $(b \triangle a)^2 = a(a \triangle b)$. Hallar

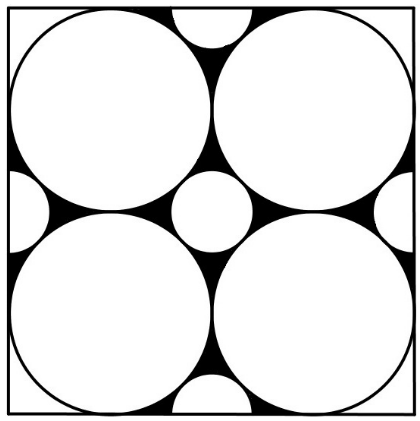
$$S = 24 \triangle 3$$

(A) 5 (B) 6 (C) -2 (D) 3 (E) No es posible.

26. Considere el número $E = 4^n + 3^n + 2^n + 1^n$, donde n es entero positivo. ¿Cual es el valor de n para que E no sea múltiplo de 5?

(A) 2018. (B) 2019. (C) 2020. (D) 2021. (E) 2022.

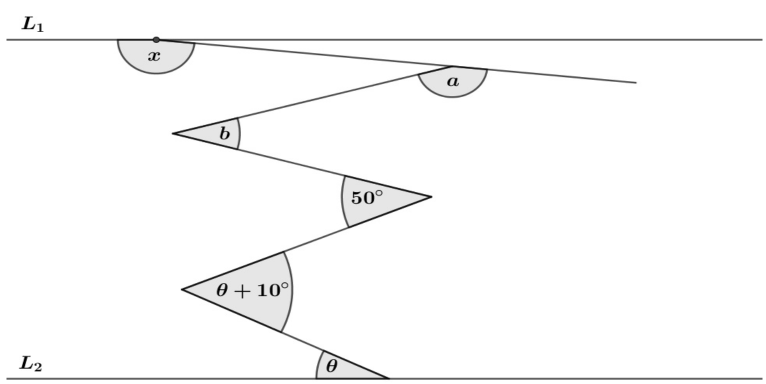
27. Cuatro fichas circulares iguales se tocan entre si, tal y como se ve en el cuadrado de lado a, ver la figura. Encontrar el valor del área de la parte sombreada.



(A) $\frac{3a^2}{8}(2 - 2\pi + \pi\sqrt{2})$ (C) $\frac{3a^2}{8}\pi\sqrt{2}$ (E) $\frac{3a^2\pi}{8}$

(B) $\frac{3a^2}{8}(2 + \pi\sqrt{2})$ (D) $\frac{3a^2}{4}$

28. En la gráfica se tiene que $a + b = 170°$ y L_1 y L_2 son paralelas. Entonces su valor del ángulo x en grados es:



29. Si α y β son soluciones de la ecuación $x^2 + 3x - 3 = 0$. Encontrar el valor de

$$\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2}$$

30. En una reunión social asistieron 8 mujeres y 10 varones. Todos se saludan entre sí.

    (a) Sea S el número de saludos que se realizan entre todos los presentes.

    (b) Sea P el número de posibles maneras que puede formar parejas (varón y mujer), para iniciar el baile.

    El resultado de $S - P$ es:

31. Considere el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. ¿De cuántas formas se puede dividir el conjunto A en dos conjuntos tal que la suma de los elementos de cada uno de ellos sea la misma?

32. Considere la ecuación cuadrática en x: $t^2 - 212 = x(x+1)$, esta ecuación tiene dos soluciones enteras distintas. Si t es un entero positivo, hallar la cantidad de todos los posibles valores de t.

33. Sean x, y, z números enteros positivos. Hallar la cantidad de soluciones del sistema:
$$\begin{cases} xy + z = 34 \\ x + yz = 29 \end{cases}$$

34. Considere la siguiente sucesión de números:
$$\frac{20}{21}, \frac{20}{22}, \frac{20}{23}, \frac{20}{24}, \ldots, \frac{20}{2001}, \frac{20}{2002}, \frac{20}{2003}$$
    La cantidad de fracciones que se pueden simplificar es:

Parte II

Soluciones

4. Soluciones de la categoría α

1. Si se eligen tres números del cuadro, uno de cada fila y uno de cada columna, y se suman, ¿cuál es el mayor valor que puede tener la suma?

10	11	12
13	14	15
16	17	18

(A) 36 (B) 39 (C) 42 (D) 45 (E) 51

Solución 1. Reescribiendo el cuadro de la siguiente forma:

10 +0	10+1	10+2
13+0	13+1	13+2
16+0	16+1	16+2

notamos que en el problema debemos elegir en particular tres números de tal forma que no haya dos en misma fila del siguiente tablero

0	1	2
0	1	2
0	1	2

La máxima suma posible será 3. Notar que existen varias posibilidades para conseguir este propósito. Pero en el tablero original suman $10 + 13 + 16 + 3 = 42$.

Solución 2. Reescribiendo el cuadro de la siguiente forma:

10 +0	10+1	10+2
13+0	13+1	13+2
16+0	16+1	16+2

Si para cualquier número $x+p$ elegido como primero, donde x (fila) puede tomar los valores 10, 13, 16 y p (columna) puede tomar los valores 0, 1, 2. Por ejemplo, si $x = 13$ y $p = 2$, entonces para escoger el siguiente número ya no podemos elegir el 13 y 2, pues no podemos repetir en la misma fila y columna respectivamente, luego los valores que puede tomar x es 10 y 16 y para p son el 0 y 1. Si escogemos el segundo número $x = 16$ y $p = 1$, entonces para el tercer número sólo nos queda $x = 10$ y $p = 0$, ahora sumamos estos números:

$$10 + 13 + 16 + 0 + 1 + 2 = 42$$

Así podemos concluir que sin importar como se escojan los números, siempre y cuando no se repita la fila y columna la suma siempre va ser igual a 42.

$\boxed{\text{Respuesta (C) 42}}$

2. En tres días María ganó 280 Bolivianos, si cada día ganó la mitad de lo que ganó el día anterior. ¿Cuánto ganó el tercer día?.

(A) 30 (B) 40 (C) 50 (D) 60 (E) 70

Solución 1. El segundo día ganó el doble del tercer día. El primer día gano el doble del segundo día, es decir, cuatro veces lo del tercer día. En total, ganó $1+2+4=7$ veces lo que ganó el tercer día. Entonces, el tercer día ganó $280/7=40$ Bs.

Solución 2. Consideremos a x la cantidad ganada el primer día, entonces $\frac{1}{2}x$ es la cantidad ganada el segundo día, luego $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)$ es la cantidad ganada el tercer día. Asi sumando las ganancias de los tres días e igualando a 280 Bs, tenemos la ecuación $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)=280$, de aquí $x=160$. Por tanto, el hombre gano $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x)=\frac{1}{4}\cdot 160=40$ Bs. en el tercer día.

$$\boxed{\text{Respuesta (B) 40}}$$

3. En una competencia de encestar de basketball, cada competidor lanza diez pelotas que están numeradas del 1 al 10. El número de puntos obtenidos por cada vez que encesta es igual al número de la pelota. Si un competidor falla exactamente dos lanzamientos, ¿cuál de los siguientes puntajes no es posible?

(A) 52 (B) 44 (C) 41 (D) 38 (E) 35

Solución. Primeramente sumaremos todos los números de las pelotas

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$$

Ahora vamos a suponer que el jugador falla las pelotas numeradas con el 10 y 9 entonces el puntaje obtenido es 36, y si falla las pelotas numeradas con los números 1 y 2 su puntaje obtenido es 52, Así el mínimo puntaje posible es 36 y el máximo puntaje posible es 52, entonces el puntaje que no es posible es 35.

$$\boxed{\text{Respuesta (E) 35}}$$

4. Si, $a^{\triangle}=\dfrac{a+2}{a-1}$ con $a\neq 1$, $b^{\square}=\dfrac{b^2-1}{b}$ con $b\neq 0$ y $c^{\bigcirc}=(c-1)^2$.

Por ejemplo, $3^{\triangle}=\dfrac{3+2}{3-1}=\dfrac{5}{2}$. Hallar: $Z=((2^{\triangle})^{\square})^{\bigcirc}$

(A) 95/9 (B) 121/16 (C) 81/16 (D) 106/14 (E) 132/25

Solución.

$$Z=((2^{\triangle})^{\square})^{\bigcirc}=\left(\left(\frac{2+2}{2-1}\right)^{\square}\right)^{\bigcirc}=(4^{\square})^{\triangle}=\left(\frac{4^2-1}{4}\right)^{\triangle}=\left(\frac{15}{4}\right)^{\triangle}=\left(\frac{15}{4}-1\right)^2=\frac{121}{16}$$

$$\boxed{\text{Respuesta (B)} \quad Z=121/16}$$

5. Hernán escribe en la pizarra todos los números positivos menores que 50, que tienen exactamente 4 divisores positivos. Calcular la suma de todos los números que escribió Hernán.

(A) 230 (B) 269 (C) 374 (D) 456 (E) 470

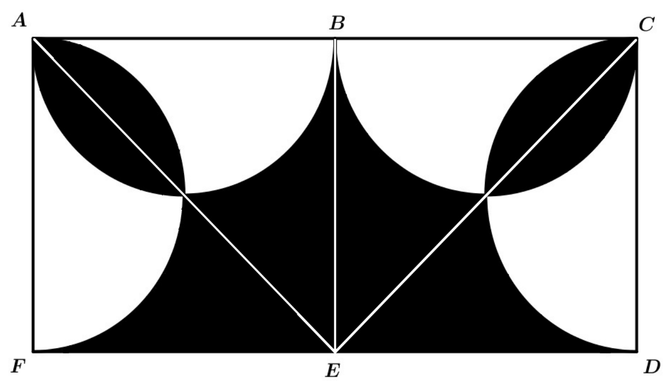
Solución. Un número que tenga exactamente cuatro divisores positivos es el producto de dos primos distinto o la potencia al cubo de un primo. Los primeros primos

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$$

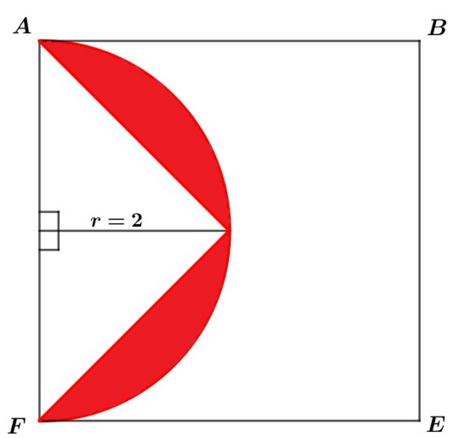
sirven, el siguiente primo 29 multiplicado por 2 es muy grande. Los números menores a 50 obtenidos al multiplicar dos primos distintos son $6, 10, 14, 22, 26, 34, 38, 46,$ $15, 21, 33, 39$ y 35. Las potencias cúbicas de un primo menores a 50 son $8, 27$. Así la suma de todos estos números es 374.

$$\boxed{\text{Respuesta (C)} \quad 374}$$

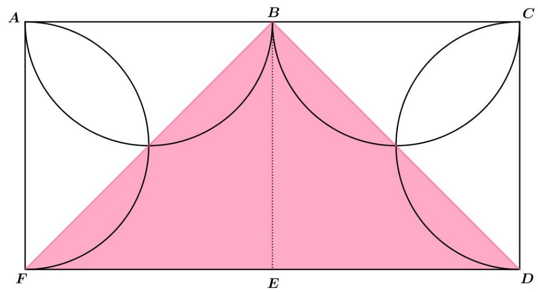
6. En la figura $ABEF$ y $BCDE$ son cuadrados iguales y se trazan los semicírculos de diámetros AB, AF, BC y CD. Si $AB = 2$, el área de la parte sombreada es:



Solución. En el semicírculo de diámetro AF podemos observar que las dos áreas pintadas de rojo son iguales por que ambos ángulos son rectos (90°) y comparten el mismo radio $r = 2$.



Haciendo el mismo procedimiento para los demás semicírculos de diámetros AB, BC y CD podemos obtener la siguiente imagen

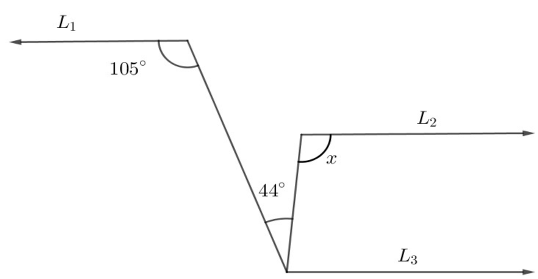


Así calcular el área del triángulo es equivalente a obtener el área de la parte sombreada buscada. Esto es:

$$A_{\triangle} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$

$$\boxed{\text{Respuesta } 4}$$

7. En el siguiente gráfico, se cumple que L_1, L_2 y L_3 son paralelas. El valor del ángulo x en grados es igual a

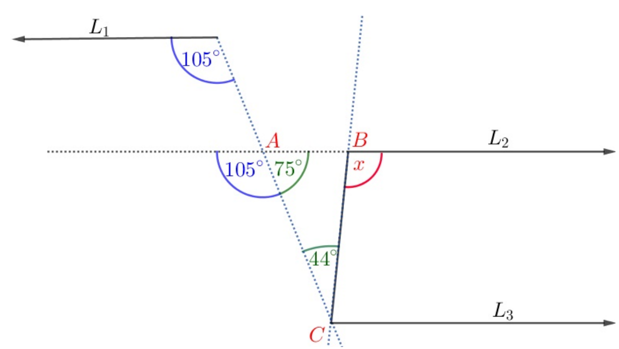


Solución. Trazando la recta L_2, de manera que formamos un triángulo ABC.

El ángulo correspondiente a 105° esta pintado de azul, y el ángulo suplementario de 105° es $75° = 180° - 105°$ (ver gráfico). Luego el ángulo externo x del triángulo ABC es igual a la suma de las medidas de dos ángulo interiores 75° y 44° del triángulo ABC, es decir:

$$x = 75° + 44°$$

Por tanto, $x = 119°$.



$$\boxed{\text{Respuesta } 119}$$

8. El valor de la suma

$$2021 - 2019 + 2017 - 2015 + 2013 - 2011 + \cdots + 5 - 3 + 1$$

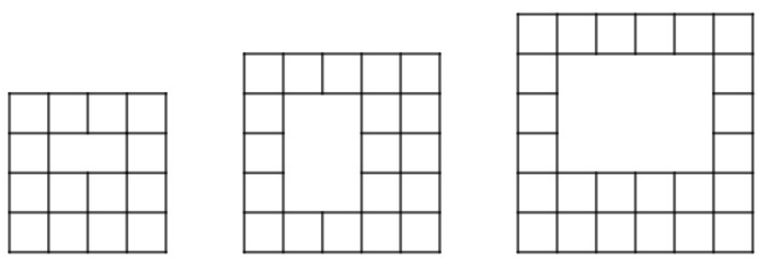
es igual a:

Solución. Denotemos con la letra n a toda la suma de los números impares con signos alternados. Es decir:

$$\begin{aligned} n =& 2021 - 2019 + 2017 - 2015 + 2013 - 2011 + \cdots + 5 - 3 + 1 \\ =& \underbrace{[2(1010)+1] - [2(1009)+1] + [2(1008)+1] - ... + [2(2)+1] - [2(1)+1]}_{\text{1010 términos}} + [2(0)+1] \\ =& \underbrace{(2021-2019)}_{2} + \underbrace{(2017-2015)}_{2} + \underbrace{(2013-2011)}_{2} + ... + \underbrace{(5-3)}_{2} + 1 \\ =& \underbrace{2+2+2+2+...+2}_{505\ veces} + 1 \\ =& 2(505)+1 \\ =& 1011 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta 1011}}$

9. Abajo se muestran las tres primeras figuras de una secuencia de figuras.



¿Cuántos cuadraditos de estos $\square$ hay en la séptima figura?

Solución.

1ra figura: 1×2 cuadraditos faltantes y $4 \times 4 - 1 \times 2$ cuadraditos que se observan.

2da figura: 2×3 cuadraditos faltantes y $5 \times 5 - 2 \times 3$ cuadraditos que se observan.

3ra figura: 3×4 cuadraditos faltantes y $6 \times 6 - 3 \times 4$ cuadraditos que se observan.

4ta figura: 4×5 cuadraditos faltantes y $7 \times 7 - 4 \times 5$ cuadraditos que se observan.

5ta figura: 5×6 cuadraditos faltantes y $8 \times 8 - 5 \times 6$ cuadraditos que se observan.

6ta figura: 6×7 cuadraditos faltantes y $9 \times 9 - 6 \times 7$ cuadraditos que se observan.

7ma figura: 7×8 cuadraditos faltantes y $10 \times 10 - 7 \times 8$ cuadraditos que se observan.

Luego en la séptima figura hay $10 \times 10 - 7 \times 8 = 44$ cuadraditos $\square$.

$\boxed{\text{Respuesta 44}}$

5. Soluciones de la categoría β

10. Sea la sucesión de números enteros:

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \ldots$$

¿Cuál es el número que esta en la posición 2021?

(A) 61. (B) 62. (C) 63. (D) 64. (E) 65.

Solución. Se tiene que identificar en que grupo cae el 2021.

- El término número 1 cae en el último número del bloque de los 1‘s.
- El término número 3 cae en el último número del bloque de los 2‘s.
- El término número 6 cae en el último número del bloque de los 3‘s.

De forma general, el término número n cae en el último número del bloque, por tanto $1 + 2 + 3 + \ldots + m = n$.

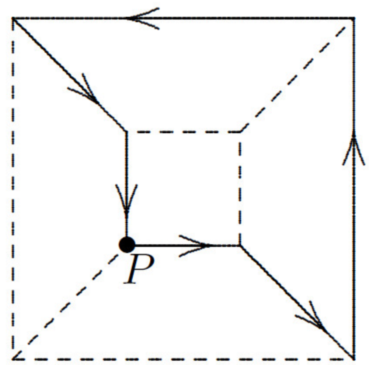
Pero $1 + 2 + 3 + \ldots + m = \dfrac{m(m+1)}{2}$.
Así es suficiente encontrar un número m que cumpla: $S_m = \dfrac{m(m+1)}{2} \geq 2021$ y $S_{m-1} < 2021$.
Si $m = 64$, entonces cumple con lo pedido, así el número que esta en la posición 2021 es 64.

$$\boxed{\text{Respuesta (D) 64}}$$

11. Una araña camina solo por las aristas de un cubo. Empieza en el vértice P, al final de la primera arista gira a la derecha, al final de la segunda arista gira a la izquierda y así sucesivamente va alternando giro a la derecha con giro a la izquierda. ¿Cuál es la cantidad de aristas que debe caminar para regresar por primera vez a P?.

(A) 6. (B) 12. (C) 15. (D) 18. (E) 24.

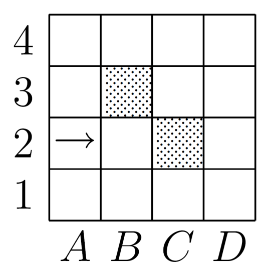
Solución. Podemos notar que cada arista es parte de dos cuadrados y que el movimiento hace que cuando la araña ha recorrido exactamente dos aristas de un mismo cuadrado, la siguiente arista que toma es en otro cuadrado distinto, por tanto el movimiento es como se muestra en la siguiente figura:



Así la cantidad de aristas que debe caminar para regresar por primera vez a P es 6.

Respuesta (A) 6

12. Daniela camina dentro de un tablero de 4×4 en los cuadrados blancos empezando en el cuadrado $A2$ y en el sentido de la flecha (ver figura). Daniela siempre va de frente a menos que se tope con un obstáculo (es decir, con la orilla del tablero o con un cuadro gris) en tal caso da vuelta a la derecha, sin embargo se detiene si al dar la vuelta a la derecha encuentra otra vez un obstáculo, ¿En que posición del tablero se detiene?.



(A) $B1$. (B) $A4$. (C) $D1$. (D) $C4$. (E) Nunca.

Solución. Daniela nunca se detiene, ya que según el tablero, empieza en $A2$, luego va a $B2$, luego va a $A1$ y luego va por la orilla del tablero de forma indefinida.

Respuesta (E) Nunca

13. Arturo tiene un hijo que se llama Luis y un nieto que se llama Pedro. Arturo se da cuenta que su edad, la edad de su hijo y la edad de su nieto son tres números que cumplen las siguientes dos condiciones:

(a) Al ser divididos por un número impar mayor que 1, el resultado no es un número entero.

(b) Al sumar las tres edades se obtiene 100 años

¿Cuántos años tiene Luis?

(A) 28. (B) 16. (C) 32. (D) 64. (E) 4.

Solución. Para que las edades de Arturo, Luis y Pedro no puedan ser divisibles por un número impar, entonces los números deben ser pares. Los únicos números pares del 2 al 100 que no son divisibles por un impar mayor a 1 son $\{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$. Así la única combinación de estos 6 para que 3 de ellos sumen 100 son $64, 32$ y 4.

$$\boxed{\text{Respuesta (C) 32}}$$

14. El reloj de Fernando esta retrasado por 12 minutos, pero el cree que está adelantado por 5 minutos. El reloj de Teresa esta adelantado por 5 minutos, pero ella cree que está retrasado por 10 minutos. Si Fernando cree que son las 13:00. ¿Qué hora cree Teresa que es?

(A) 12:48. (B) 12:52. (C) 13:28. (D) 13:32. (E) 13:42.

Solución. Si Fernando cree que son las $13:00$ entonces su reloj marca las $13:05$ ya que cree que esta adelantado 5 minutos. Como el reloj de Fernando en realidad esta retrasado 12 minutos, entonces la hora real es $13:17$. Por otro lado el reloj de Teresa esta adelantado 5 minutos, entonces marca $13:22$. Pero Teresa cree que su reloj está atrasado 10 minutos, entonces cree son las $13:32$.

$$\boxed{\text{Respuesta (D) } 13:32}$$

15. ¿Cuál de los siguientes números no puede escribirse como $x + \sqrt{x}$ para x un entero?

(A) 992. (B) 56. (C) 132. (D) 462. (E) 168.

Solución. Notemos que $\sqrt{x}$ es un entero porque deber ser la diferencia de dos enteros. Como $x + \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)$, buscamos números que son producto de dos enteros consecutivos. Notamos que $992 = 31 \cdot 32$; $56 = 7 \cdot 8$; $132 = 11 \cdot 12$; $462 = 21 \cdot 22$. Pero 168 no es producto de dos enteros consecutivos.

$$\boxed{\text{Respuesta (E) 168}}$$

16. Los números 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 y 100, se van a acomodar en el cuadrado de la figura, de forma que el producto de los tres números en cada fila, en cada columna y en cada diagonal sean iguales. Dos números ya se escribieron en el cuadrado. ¿Qué número se debe escribir en el cuadrado con el signo de interrogación?

		50
?		4

(A) 5. (B) 10. (C) 100. (D) 25. (E) 50.

Solución 1. Los números de la lista son

$$1,\ 2,\ 4 = 2^2,\ 5,\ 10 = 2 \cdot 5,\ 20 = 2^2 \cdot 5,\ 25 = 5^2,\ 50 = 2 \cdot 5^2,\ 100 = 2^2 \cdot 5^2.$$

Entonces el producto de estos nueve números es $2^9 5^9 = (10^3)^3 = 1000^3$. Por tanto el producto de los números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal es 1000. Entonces, debajo de 4 necesariamente debe estar 5. Notemos que 100 no puede estar en la fila donde está el 50 ni donde está el 4, debe estar en la fila donde está el 5. No puede estar en la esquina izquierda de abajo porque hay problemas con el 50 en la diagonal secundaria. Por tanto, 100 está al lado de 5 y 2 está en la esquina izquierda de abajo. Además 10 está en la casilla del centro para que los números de la diagonal secundaria sea 1000. Así, en la segunda columna necesariamente 1 está en la primera casilla. Por tanto, 20 en la primera casilla de la primera fila. Finalmente 25 está en la segunda fila de la primera columna.

Solución 2. Según condición del problema cada columna tiene el mismo producto, por tanto debe ser igual a la raíz cúbica del producto de todos los números, es decir 1000. Así debajo del número 4 tiene que estar el número 5, en la fila del número 4 también el producto debe ser 1000, y la única forma de conseguirlo es escribiendo los números 25 y 10. Para que el producto de la diagonal donde esta el 50 sea igual a 1000 la única posibilidad es que se escriba 10 en el centro, entonces 2 va en la esquina y 1 va arriba de 10. La figura completa queda de la siguiente manera:

20	1	50
25	10	4
2	100	5

Por tanto el número que se debe escribir en el cuadrado con el signo de interrogación es 25.

$\boxed{\text{Respuesta (D) 25}}$

17. Considere la ecuación cuadrática $x^2 - 99x + t = 0$. Si las dos raíces de la ecuación son números primos, entonces la suma de los dígitos de t es:

Solución 1. Por propiedades de las raíces de las ecuaciones cuadráticas, la suma de las raíces es 99 y ambos son primos, necesariamente uno es par, es decir 2. El otro es 97. Entonces

$$(x-2)(x-97) = x^2 - 99 + t.$$

Entonces $t = (-2) \times (-97) = 194$, y la suma de sus dígitos es $1 + 9 + 4 = 14$.

Solución 2. Consideremos la ecuación $x^2 - 99x + t = 0$ por la fórmula general

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = \frac{99 \pm \sqrt{b^2 - 4t}}{2},$$

ya que las soluciones de la ecuación son números primos, entonces por la última ecuación tenemos que una de las soluciones tiene que ser un número primo par es decir 2.
Por otro lado tenemos las siguientes ecuaciones:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 99$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = t$$

$$x_1 = 2$$

Resolviendo el sistema $x_2 = 97$ así $t = 194$. Luego la suma de los dígitos de t es 14

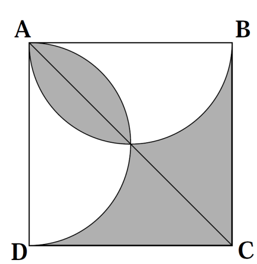
$\boxed{\text{Respuesta 14}}$

18. Considere el siguiente conjunto conformado por siete números $\{-9, -5, -4, -3, -1, 0, 5\}$. De los siete números se escogen seis y se los agrupan por parejas, de tal forma que la suma de cada pareja fuera la misma. Entonces el número que no se escogió es:

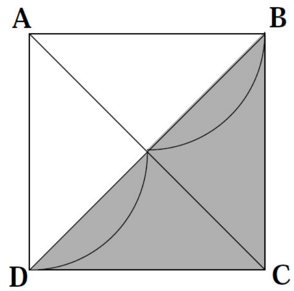
Solución. Si vemos el conjunto $\{-9, -5, -4, -3, -1, 0, 5\}$ podemos ver que hay 5 impares y 2 pares, no podemos dejar fuera un par. De esta forma 0 y -4 están juntos, la suma de esta pareja es -4 y la suma de las demás parejas debe ser -4. Por tanto las únicas posibilidades son -9 con 5 y -1 con -3. Así el número que no se escogió es -5.

$\boxed{\text{Respuesta } -5}$

19. Considere la figura en la que se muestra un cuadrado $ABCD$ y dos semicírculos con diámetros AB y AD. Si $AB = 16$. Entonces el área de la región sombreada es:



Solución. Consideremos la siguiente figura:



En la que se observa que el área sombreada es igual a la mitad del área del cuadrado: 128

$\boxed{\text{Respuesta } 128}$

20. En la olimpíada paceña de matemática se encontraron dos amigos, Carlos y Luis. Carlos y Luis compitieron resolviendo 100 problemas. Algunos problemas fueron resueltos por lo dos, pero otros problemas no fueron resueltos por ninguno de los dos.

    Por cada problema resuelto, el primero en resolverlo obtiene 4 puntos y, en caso que lo hubieran resuelto los dos, el segundo obtiene 1 punto. Si cada uno de ellos resolvió 60 problemas y entre los dos lograron 393 puntos.

    La cantidad de problemas que resolvieron en común es:

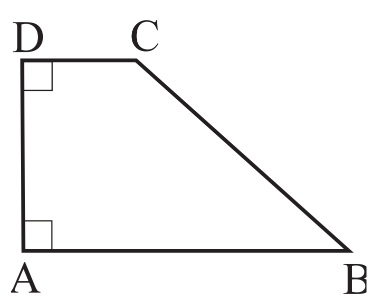
    Solución. Sea t la cantidad de problemas que resolvieron en común. Por cada problema que resuelvan en común se suman 5 puntos a la cuenta total. Por tanto generamos la ecuación que da el total de puntos.

    $$5t + 4(60 - t) + 4(60 - t) = 480 - 3t$$

    Y según datos $480-3t = 393$ entonces $t = 29$. así la cantidad de problemas que resolvieron es 29.

    $\boxed{\text{Respuesta } 29}$

21. Considere la figura. Los cuatro lados tienen longitudes enteras y su área es de 686 m^2. Si $AD = 28\ m$ y $CB = AB$. El perímetro de la figura es:



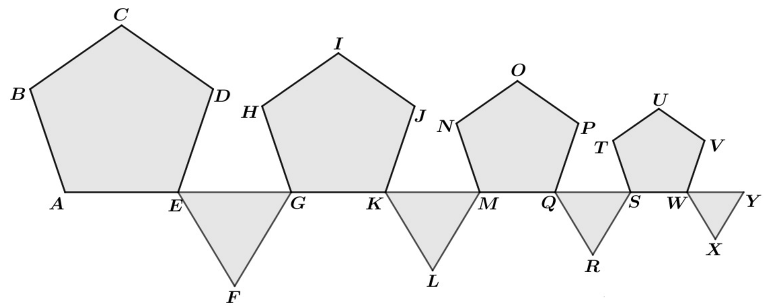
Solución. Sea $CD = y$, $CB = AB = x$. Considere el segmento CE perpendicular al segmento AB en E. Por tanto $AE = y$, $EB = x-y$. Como $AD = 28$ entonces $CE = 28$. por dato, el área de la figura es 686, se tiene $28y + \frac{28(x-y)}{2} = 686$, así $y = 49 - x$. Por otro lado, aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos $x^2 = 28^2 + (x-y)^2$ así $784 + (x - 49 + x)^2 = x^2$ entonces $3x^2 - 196x + 3185 = 0$ cuyas soluciones son $x = 35$ ó $x = \frac{91}{3}$, como los lados tienen longitud entera entonces $x = 35$. Así $y = 14$, así el perímetro es $28 + 14 + 35 + 35 = 112$ en metros.

$$\boxed{\text{Respuesta } 112\,m}.$$

6. Soluciones de la categoría γ

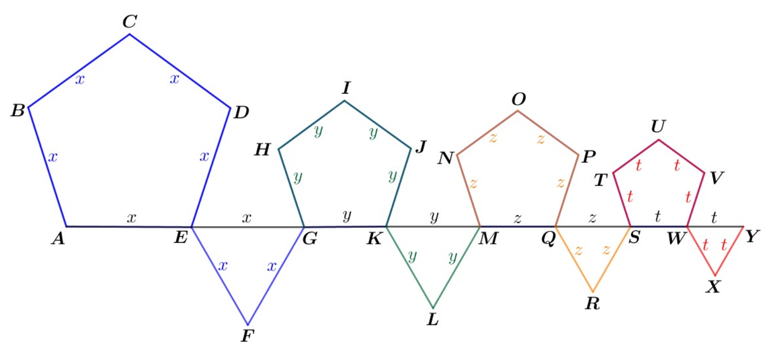
22. En la figura los pentágonos regulares y triángulos equiláteros tienen un lado sobre el segmento AY de 18 cm. de manera que $DE = EF$, $JK = KL$, $PQ = QR$ y $VW = WX$ (ver figura). Hallar la longitud de la trayectoria formada por los puntos

$$ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXY$$



(A) 54 (B) 108 (C) 144 (D) 106 (E) 90

Solución. Por ser el pentágono regular y el triángulo isósceles y $DE = EF$ la medida de cualquiera de los lados de estas figuras es la misma, llamemos x, el cual se repite seis veces en la trayectoria que se desea encontrar(color azul), lo mismo ocurre con y, z y t (ver figura).



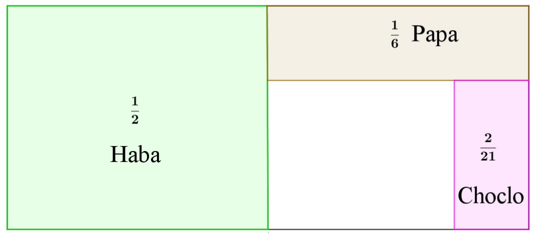
Además la longitud del segmento $AY = 2x + 2y + 2z + 2t = 18$ y la trayectoria, que nos pide hallar su longitud, es: $6x + 6y + 6z + 6z = 3(2x + 2y + 2z + 2t) = 3(18) = 54$

$$\boxed{\text{Respuesta (A) 54}}$$

23. En la mitad de un terreno se siembra haba, en la tercera parte del resto se siembra papa y en las $2/7$ partes de lo que queda se siembra choclo ¿Qué fracción del terreno no sembrada con papa, quedo sin sembrar?.

(A) 2/21 (B) 1/6 (C) 5/14 (D) 10/21 (E) 2/7

Solución. Consideremos al terreno como el rectángulo mas grande de la figura:



En la mitad del terreno se siembra haba (color verde) y es expresado por: $\frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$.
En la tercera parte del resto se siembra papa (color café), esto es expresado por: $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$.
Y en las $2/7$ partes de lo que queda se siembra choclo (color morado), esto es: $\frac{2}{7}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{21}$.
Además la parte que no esta sembrada tiene la fracción de $5/21$ (color blanco). Y la parte que no esta sembrada de papa tiene la fracción de $1/2 + 5/21 + 2/21 = 5/6$. Ahora para responder la pregunta, utilizamos la regla de tres simple:

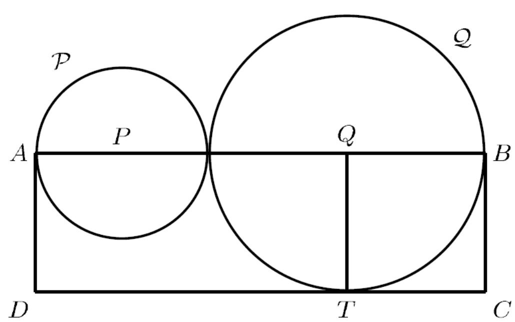
$$\frac{5}{6} \rightarrow 1$$

$$\frac{5}{21} \rightarrow \text{x}$$

Por tanto la fracción que quedo sin sembrar del terreno no sembrada con papa es $x = 2/7$.

$\boxed{\textbf{Respuesta (E) } 2/7}$

24. Considere la figura, P y Q son los centros de los círculos tangentes $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, respectivamente. La recta PQ corta al círculo $\mathcal{P}$ en A y a $\mathcal{Q}$ en B como se muestra en la figura. El rectángulo $ABCD$ es tangente al círculo $\mathcal{Q}$ en T. Si el área de $ABCD$ es 15. ¿Cuál es el área del triángulo PQT?



(A) $\frac{\pi}{2}$. (B) $\frac{15}{2}$. (C) $\frac{\pi}{4}$. (D) $\frac{15}{4}$. (E) $2\sqrt{15}$

Solución. Sean r y R los radios de P y Q respectivamente. Ahora consideremos el rectángulo $ABCD$, que tiene área igual a $(2r + 2R)R$, que según dato es 15, entonces $(2r + 2R)R = 15$ luego $(r + R)R = \frac{15}{2}$. Así el área del triángulo PQT es:

$$\frac{(r + R)R}{2} = \frac{15}{4}$$

$$\boxed{\textbf{Respuesta (D) } 15/4}$$

25. Consideremos $\triangle$ como una operación entre dos números. Dados dos números x, y la operación triángulo devuelve un número no negativo $x \triangle y$. Se sabe que para cualesquiera números a, b se cumple que $(b \triangle a)^2 = a(a \triangle b)$. Hallar

$$S = 24 \triangle 3$$

(A) 5 (C) -2 (E) No es posible.

(B) 6 (D) 3

Solución. Primeramente encontraremos $b \triangle a$ en términos de b y a

$$\begin{aligned}
(b \triangle a)^2 &= a(a \triangle b) \\
(b \triangle a)^4 &= a^2(a \triangle b)^2 \\
(b \triangle a)^4 &= a^2 b(b \triangle a) \\
(b \triangle a)^3 &= a^2 b \\
b \triangle a &= \sqrt[3]{a^2 b}
\end{aligned}$$

Luego: $24 \triangle 3 = \sqrt[3]{3^2 \cdot 24} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2^3} = 6$

$$\boxed{\textbf{Respuesta (B) } 6}$$

26. Considere el número $E = 4^n + 3^n + 2^n + 1^n$, donde n es entero positivo. ¿Cual es el valor de n para que E no sea múltiplo de 5?

(A) 2018 (B) 2019 (C) 2020 (D) 2021 (E) 2022

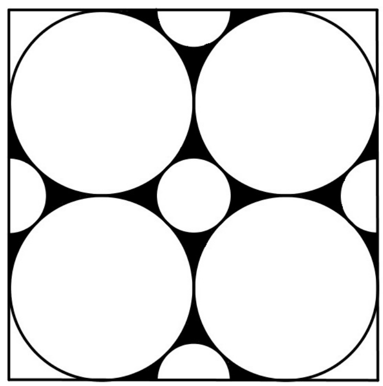
Solución. Consideremos la siguiente tabla que aglutina todos los casos de los últimos dígitos de las potencias. Luego se repiten en bloques de 4.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
1^n	1	1	1	1	1	1	1	1
2^n	2	4	8	6	2	4	8	6
3^n	3	9	7	1	3	9	7	1
4^n	4	6	4	6	4	6	4	6
E	0	0	0	4	0	0	0	4

Para que un número sea múltiplo de 5, el último dígito debe ser 0 o 5. Para que $4^n+3^n+2^n+1^n$ no sea múltiplo de 5 se nota que n debe ser múltiplo de 4 y de las opciones solo cumple 2020.

$$\boxed{\textbf{Respuesta (C) } 2020}$$

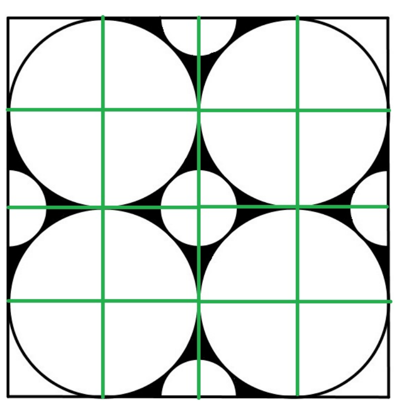
27. Cuatro fichas circulares iguales se tocan entre si, tal y como se ve en el cuadrado de lado a, ver la figura. Encontrar el valor del área de la parte sombreada.



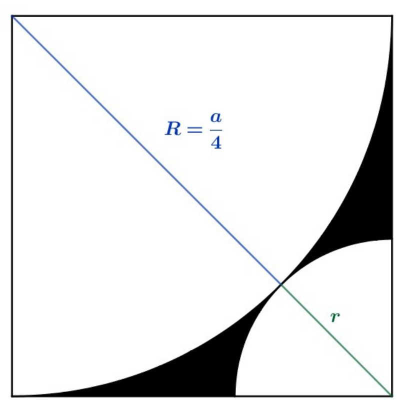
(A) $\frac{3a^2}{8}(2-2\pi+\pi\sqrt{2})$ (C) $\frac{3a^2}{8}\pi\sqrt{2}$ (E) $\frac{3a^2\pi}{8}$

(B) $\frac{3a^2}{8}(2+\pi\sqrt{2})$ (D) $\frac{3a^2}{4}$

Solución. Dividimos a la figura en 16 cuadrados pequeños iguales (ver imagen (a)) y extraemos un cuadrado pequeño (ver imagen (b)).



(a) Dividido en 16 cuadrados



(b) Un sólo cuadrado

Primero hallemos el radio de la circunferencia central, según la gráfica y el teorema de Pitágoras podemos concluir:

$$r=\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\right)^2}-\frac{a}{4}=\frac{a}{4}(\sqrt{2}-1)$$

El área de la región sombreada de la imagen (b) es:

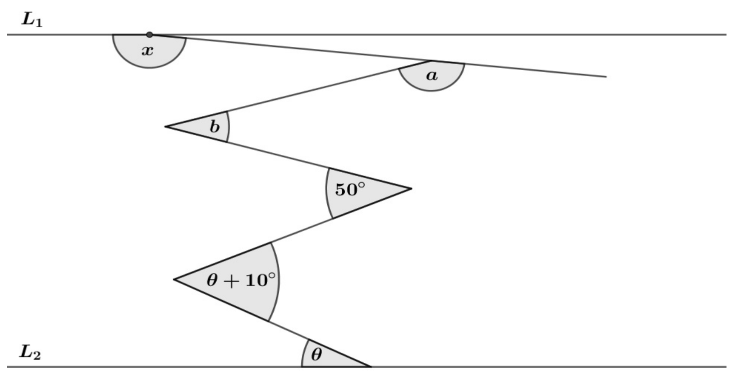
$$\left(\frac{a}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\left[\pi\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{a}{4}(\sqrt{2}-1)\right)^2\right] = \left(\frac{a}{4}\right)^2\left(1-\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)$$

Ahora el total del área sombreada es doce veces el resultado anterior, entonces:

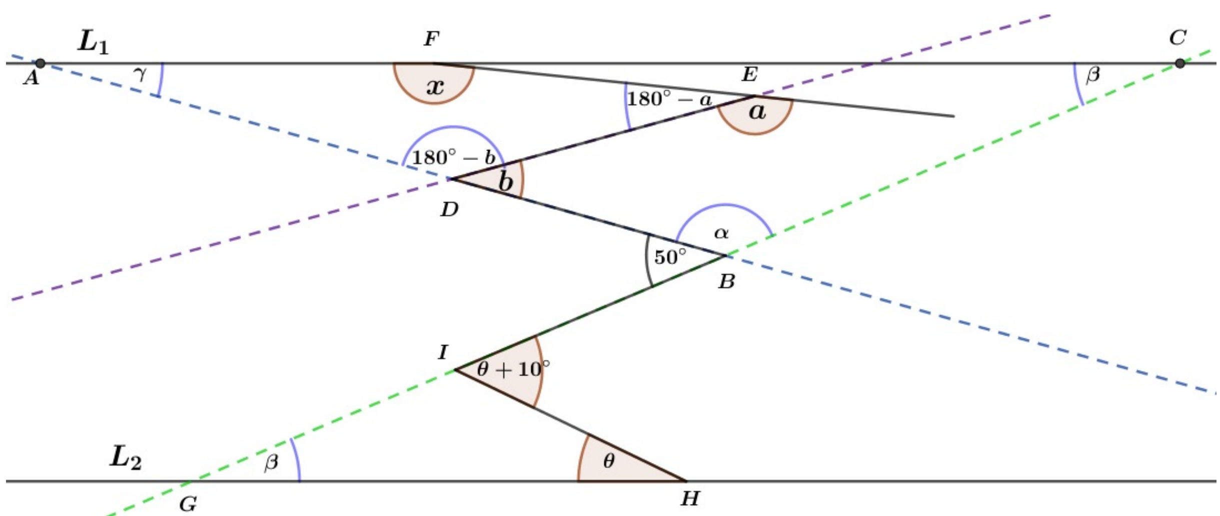
$$12\left(\frac{a}{4}\right)^2\left(1-\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right) = \frac{3a^2}{8}(2-2\pi+\sqrt{2}\pi)$$

$\boxed{\textbf{Respuesta (A) } \frac{3a^2}{8}(2-2\pi+\pi\sqrt{2})}$

28. En la gráfica se tiene que $a+b=170°$ y L_1 y L_2 son paralelas. Entonces su valor del ángulo x en grados es:



Solución. Primeramente trazamos rectas, como se ve en la siguiente imagen



EL ángulo exterior $\theta+10$ es suma de los ángulos interiores del triángulo GHI, es decir $\theta+10° = \beta+\theta$, de aquí $\beta = 10°$. Por suplementos de ángulos $\alpha = 130°$, lo mismo para los ángulos $(180^\circ - b)$ y $(180^\circ - a)$. Ahora en el triángulo ABC, sabemos que todos sus ángulos interiores suman 180°, esto es $\gamma + \alpha + \beta = 180$, sustituyendo los valores conocidos de α y β, se obtiene $\gamma = 40^\circ$. Luego la suma de todos los ángulos internos del cuadrilátero $ADEF$ es 360°, de tal manera se obtiene la siguiente ecuación:

$$x + \gamma + (180 - b) + (180 - a) = 360$$

Por tanto, resolviendo la anterior ecuación tenemos $x = 130$.

$\boxed{\textbf{Respuesta}\ \ 130}$

29. Si α y β son soluciones de la ecuación $x^2 + 3x - 3 = 0$. Encontrar el valor de

$$\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2}$$

Solución. Una ecuación cuadrática en x es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, siendo α y β soluciones de la ecuación, la suma y producto de sus raíces esta dado por:

$$\alpha + \beta = -\tfrac{b}{a} \quad \text{y} \quad \alpha \cdot \beta = \tfrac{c}{a}$$

Ahora para la ecuación $x^2 + 3x - 3 = 0$ con $a = 1$, $b = 3$ y $c = -3$, se tiene la suma y producto de sus raíces $\alpha + \beta = -3$ y $\alpha \cdot \beta = -3$.

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= -3 \\
(\alpha + \beta)^3 &= (-3)^3 \\
\alpha^3 + 3\alpha^2 \cdot \beta + 3\alpha \cdot \beta^2 + \beta^3 &= -27 \\
\alpha^3 + \beta^3 &= -27 - 3\alpha^2 \cdot \beta - 3\alpha \cdot \beta^2 \\
\alpha^3 + \beta^3 &= -27 - 3\alpha \cdot \beta(\alpha + \beta) \\
\alpha^3 + \beta^3 &= -27 - 3(-3)(-3) \\
\boxed{\alpha^3 + \beta^3 = -54} &\quad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \beta &= -3 \\
(\alpha \cdot \beta)^2 &= (-3)^2 \\
\alpha^2 \cdot \beta^2 &= 9 \\
\boxed{\alpha^2 \cdot \beta^2 = 9} &\quad (2)
\end{aligned}$$

Luego dividiendo la ecuación (1) entre (2) tenemos $\dfrac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2 \cdot \beta^2} = \dfrac{-54}{9}$, de aquí $\dfrac{\alpha}{\beta^2} + \dfrac{\beta}{\alpha^2} = -6$

$\boxed{\textbf{Respuesta}\ \ -6}$

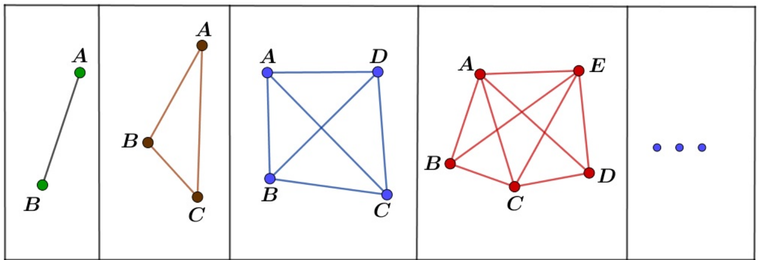
30. En una reunión social asistieron 8 mujeres y 10 varones. Todos se saludan entre sí.

    (a) Sea S el número de saludos que se realizan entre todos los presentes.

    (b) Sea P el número de posibles maneras que puede formar parejas (varón y mujer), para iniciar el baile.

El resultado de $S - P$ es:

Solución. Realizamos la siguiente gráfica:



1 *Saludo*	3 *Saludos*	6 *Saludos*	10 *Saludos*	...
$\binom{2}{2}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{5}{2}$	...

(a) Observemos el gráfico, las líneas que unen los puntos representan los saludos y las letras a las personas; cuando hay dos personas tenemos un saludo, cuando hay tres personas tenemos tres saludos, cuando hay cuatro personas tenemos seis saludos,y como hay 18 persona en una reunión social (8 mujeres y 10 varones), entonces el número de saludos de 18 personas es equivalente al número de combinaciones de 18 objetos tomados de 2. Esto es

$$\binom{18}{2} = \frac{18!}{2! \times (18-2)!} = \frac{18 \times 17 \times 16!}{2! \times 16!} = 153$$

luego $S = 153$.

(b) Consideremos a una mujer, ella tiene 10 posibles candidatos varones para formar pareja, este proceso se repite para cada una de las 8 mujeres, entonces las posibles parejas son $8 \times 10 = 80$, luego $P = 80$

Así la respuesta es: $S - P = 73$

$\boxed{\textbf{Respuesta } 73}$

31. Considere el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. ¿De cuántas formas se puede dividir el conjunto A en dos conjuntos tal que la suma de los elementos de cada uno de ellos sea la misma?

Solución. Si sumamos los elementos del conjunto A tenemos 28, entonces la suma de cada conjunto tiene que ser 14, por tanto tenemos 4 formas que son:

$$\{7, 1, 6\}; \quad \{2, 3, 4, 5\}$$
$$\{7, 2, 5\}; \quad \{1, 3, 4, 6\}$$
$$\{7, 3, 4\}; \quad \{1, 2, 5, 6\}$$
$$\{7, 1, 2, 4\}; \quad \{3, 5, 6\}$$

$\boxed{\textbf{Respuesta } 4}$

32. Considere la ecuación cuadrática en x: $t^2 - 212 = x(x+1)$, esta ecuación tiene dos soluciones enteras distintas. Si t es un entero positivo, hallar la cantidad de todos los posibles valores de t.

Solución. La ecuación cuadrática se la puede escribir como $x^2 + x + 212 - t^2 = 0$.
Las soluciones son $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{\triangle}}{2}$, como las soluciones deben ser enteras y distintas, entonces $\triangle > 0$ tal que $\triangle = m^2$ para algún m entero positivo y $-1 \pm m$ sea par, esto es m sea impar.
Así debe cumplir $1 - 4(212 - t^2) = m^2$ esto es $4t^2 - m^2 = 847$ de donde $(2t-m)(2t+m) = 7 \cdot 11^2$ esta ultima ecuación genera tres posibilidades:

- $(2t - m) = 7 \cdot 11^2$ y $(2t + m) = 1$ entonces $t = 212$ y $m = 423$
- $(2t - m) = 7 \cdot 11$ y $(2t + m) = 11$ entonces $t = 22$ y $m = 33$
- $(2t - m) = 7$ y $(2t + m) = 11^2$ entonces $t = 32$ y $m = 57$

Así $t = 212$, $t = 22$ y $t = 32$.
Por tanto la cantidad de todos los posibles valores de t es 3

$$\boxed{\textbf{Respuesta } 3}$$

33. Sean x, y, z números enteros positivos. Hallar la cantidad de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} xy + z = 34 \\ x + yz = 29 \end{cases}$$

Solución. Si restamos las ecuaciones, tenemos: $xy + z - x - yz = 5$, factorizando tenemos $(y-1)(x-z) = 5$, como x, y, z son enteros positivos entonces $y - 1$ es 1 ó 5, entonces $y = 2$ ó $y = 6$, ahora analizamos caso por caso.

- Si $y = 2$ entonces obtenemos el sistema $2x + z = 34$, $x + 2z = 29$ cuyas soluciones son $x = 13$, $z = 8$.
- Si $y = 6$ entonces obtenemos el sistema $6x + z = 34$, $x + 6z = 29$ cuyas soluciones son $x = 5$, $z = 4$.

por tanto la cantidad de soluciones del sistema son 2 que son $(13, 2, 8)$ y $(5, 6, 4)$

$$\boxed{\textbf{Respuesta } 2}$$

34. Considere la siguiente sucesión de números:

$$\frac{20}{21}, \frac{20}{22}, \frac{20}{23}, \frac{20}{24}, \ldots, \frac{20}{2001}, \frac{20}{2002}, \frac{20}{2003}$$

La cantidad de fracciones que se pueden simplificar es:

Solución. Para que la fracción $\frac{20}{n}$ se pueda simplificar, el 2 ó el 5 deben dividir a n. Ahora calculamos la parte entera.

Tenemos $\left[\dfrac{2003}{2}\right] = 1001$ números divisibles por 2 y menores ó iguales a 2003.
Tenemos $\left[\dfrac{20}{2}\right] = 10$ números divisibles por 2 y menores ó iguales a 20.
Así $1001 - 10 = 991$ fracciones que se pueden simplificar al dividirlas por 2.

Razonando de forma similar tenemos $\left[\dfrac{2003}{5}\right] - \left[\dfrac{20}{5}\right] = 400 - 4 = 396$ fracciones que se puede simplificar al dividirlas por 5. Así el total tendríamos $991 + 396 = 1387$, a este número debemos restar aquellos que son divisibles por 2 y por 5, es decir divisibles por 10.

$\left[\dfrac{2003}{10}\right] - \left[\dfrac{20}{10}\right] = 200 - 2 = 198$ fracciones que se pueden simplificar al dividirlas por 10.

Finalmente tenemos $1387 - 198 = 1189$ fracciones que se pueden simplificar.

Respuesta 1189

Parte III

Clave de Respuestas

7. Claves de la categoría α

Preguntas de selección múltiple				
1. **(C)**	2. **(B)**	3. **(E)**	4. **(B)**	5. **(C)**

Preguntas de respuesta corta			
6. $\boxed{4}$	7. $\boxed{119}$	8. $\boxed{1011}$	9. $\boxed{44}$

8. Claves de la categoría β

Preguntas de selección múltiple						
10. **(D)**	11. **(A)**	12. **(E)**	13. **(C)**	14. **(D)**	15. **(E)**	16. **(D)**

Preguntas de respuesta corta				
17. $\boxed{14}$	18. $\boxed{-5}$	19. $\boxed{128}$	20. $\boxed{29}$	21. $\boxed{112}$

9. Claves de la categoría γ

Preguntas de selección múltiple					
22. **(A)**	23. **(E)**	24. **(D)**	25. **(B)**	26. **(C)**	27. **(A)**

Preguntas de respuesta corta						
28. $\boxed{130}$	29. $\boxed{-6}$	30. $\boxed{73}$	31. $\boxed{4}$	32. $\boxed{3}$	33. $\boxed{2}$	34. $\boxed{1189}$