Olimpiada Paceña de Matemática
Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática,
Facultad de Ciencias Puras y Naturales,
Universidad Mayor de San Andrés.

Cuadernillo de la Primera Etapa de la 18va OPMat

Editado por

Hebe Condori Cauna
Hernán Laime Zanga

La Paz – Bolivia
2021

Índice general

Parte I

Enunciados

1. Enunciados de la categoría α

1. Un adolescente con entrenamiento en lectura lee 160 palabras 1/2 minuto. ¿Cuántas palabras leerá este adolescente en 1/2 hora?

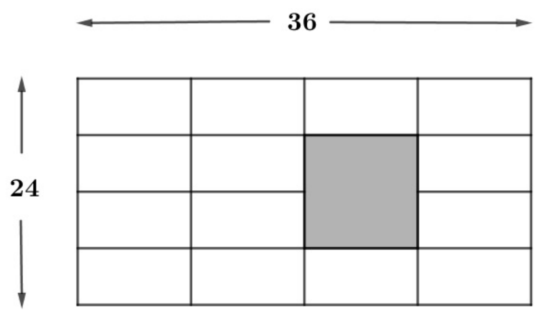
   (A) 960 (B) 640 (C) 3200 (D) 9600 (E) 1600

2. Si m es un número par, ¿Cuál de las siguientes expresiones resulta número impar? (A) $m-4$ (B) $m(m-1)$ (C) $2(m+1)$ (D) $3m+1$ (E) $m(m+1)+m$

3. Determina el número que representa el punto en la siguiente recta numérica.

   (A) $\frac{1}{5}$ (B) 6 (C) $\frac{6}{10}$ (D) $\frac{6}{5}$ (E) 1

4. Una hoja de papel rectángular que mide 24×36 es dividida en partes iguales como se muestra en la figura ¿Cuál es el perímetro del rectángulo sombreado?



   (A) 40 (B) 42 (C) 48 (D) 108 (E) 51

5. Marycel cuenta los números del 1 al 100 y aplaude si el número que dice es múltiplo de 3 o termina en 3. ¿Cuántas veces aplaudirá Marycel en total?

   (A) 30 (B) 33 (C) 36 (D) 39 (E) 43

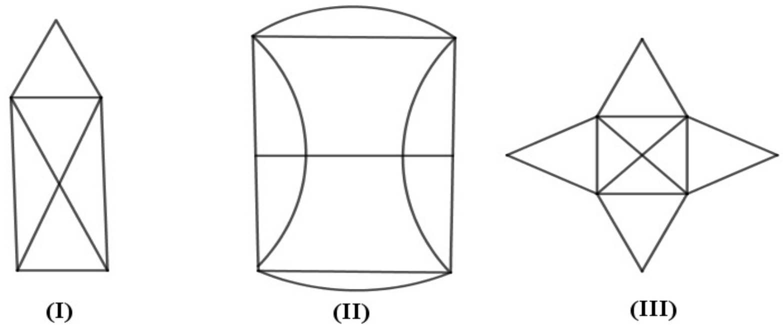
6. En una fiesta de 15 años, la corte de la quinceañera está formada por 14 damas(mujeres) y 14 pajes (varones), la quinceañera tiene la difícil tarea de formar parejas. ¿De cuantas maneras puede formar parejas la quinceañera?

   (A) 28 (B) 144 (C) 182 (D) 196 (E) 27

7. Don Pedro desea comprar un auto a batería para niños como regalo navideño para su hijo, el costo del auto es de 2100Bs. Si Don Pedro tiene a disposición 10 billetes de 100 Bs., 5 billetes de 200Bs. y 4 billetes de 50Bs. ¿De cuántas formas puede cancelar la compra Don Pedro?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

8. ¿Qué figuras se pueden realizar de un sólo trazo y sin levantar el lápiz del papel?



(A) (I) y (II) (B) (II) y (III) (C) (I) y (III) (D) Sólo (I) (E) Sólo (II)

9. En cierto mes hubo tres martes que correspondieron a fechas pares. ¿Qué día de la semana fue el 21 de ese mes?

(A) Miércoles (B) Jueves (C) Viernes (D) Sábado (E) Domingo

2. Enunciados de la categoría β

10. Hallar el valor de E si

$$E = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1295}+\sqrt{1296}}$$

(A) 31 (B) 32 (C) 33 (D) 34 (E) 35

11. Sabiendo que en este año 2021, la suma de las edades actuales de los tres miembros de una familia es 69. Si la edad actual de la madre quintuplica la edad del hijo y hace tres años la edad del padre era diez veces la edad del hijo. El año en que nació el hijo es:

(A) 2010 (B) 2015 (C) 2007 (D) 2011 (E) 2021

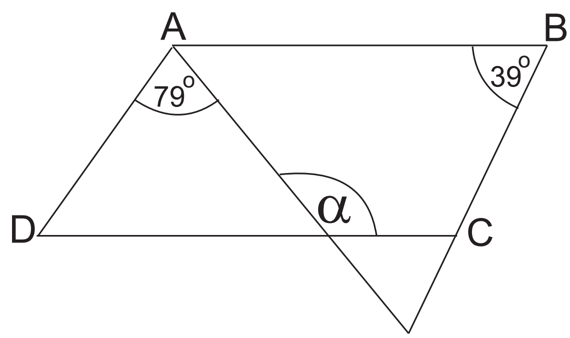
12. ¿Cuál es la suma de todos los enteros positivos n que dejan 15 como residuo al dividir 141 entre n?

(A) 250 (B) 260 (C) 270 (D) 280 (E) 290

13. En una maratón hubo más de 1000 corredores. El 40 % fueron mujeres y participaron 260 hombres más que mujeres. La cantidad de corredores en total es:

(A) 1100 (B) 1300 (C) 1320 (D) 1340 (E) 1360

14. Considere el paralelogramo $ABCD$, Cuánto vale α



(A) 116° (B) 118° (C) 120° (D) 122° (E) 124°

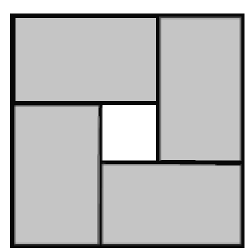
15. En un curso de una unidad educativo hay 30 estudiantes alineados en 5 filas y 6 columnas. Cada estudiante le da la mano a todos los estudiantes que se sientan a su lado, incluyendo los que se sientan diagonalmente a su lado. ¿Cuántos saludos hubo?.

(A) 79 (B) 89 (C) 99 (D) 109 (E) 110

16. Sí $3^{y+2} - 3^y = 2^x + 2^{x+1}$, donde x, y son enteros. El valor de $x + y$ es:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

17. Considere la figura en la que se muestran cuatro rectángulos iguales dentro de un cuadrado. Si el perímetro de cada rectángulo es de 18 metros. ¿Cuál es el área del cuadrado original?.



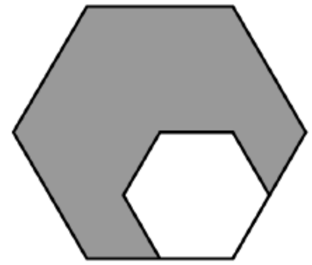
(A) 36 m^2 (B) 49 m^2 (C) 64 m^2 (D) 81 m^2 (E) 100 m^2

18. Sí $(a+b+c+d)^2 = 4(a+b)(c+d)$. Hallar el valor de

$$F = 27^{\frac{c+d}{3(a+b)}}$$

(A) 3 (B) 9 (C) 27 (D) 1 (E) -1

19. Considere la figura en donde se muestran dos hexágonos regulares. Los lados del hexágono grande miden el doble que los lados del hexágono pequeño. El hexágono pequeño tiene un área de 6 cm^2. El área del hexágono grande es:



(A) 16 cm^2 (B) 24 cm^2 (C) 28 cm^2 (D) 36 cm^2 (E) 44 cm^2

20. ¿Cuántas veces aparece el dígito 9 en la lista de números:

$$1, 2, 3, 4, \ldots, 2020, 2021?$$

(A) 426 (B) 522 (C) 699 (D) 600 (E) 602

21. Sean x, y enteros positivos con $8 < x < 16$. Si

$$y(x^2 - 2000) + x(y^2 - 2000) = 0,$$

entonces $x + y$ es igual a:

(A) 210 (B) 2021 (C) 405 (D) 200 (E) 420

3. Enunciados de la categoría γ

22. En una clase de 40 estudiantes, 14 tienen una tablet y 30 tienen un celular inteligente. ¿Cuántos estudiantes tienen ambos aparatos, si se sabe que todos tienen al menos uno de los dos?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

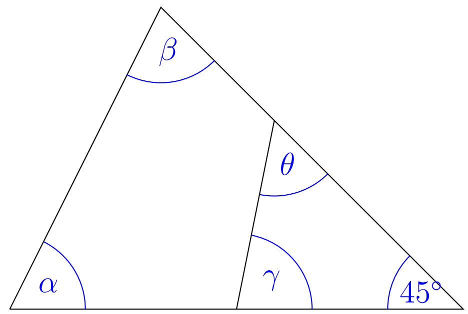
23. En un Curso de 28 estudiantes la profesora debe mandar dos estudiantes en representación al curso formado por una niña y un niño, si se sabe que hay 15 niñas y 13 niños. ¿De cuántas maneras puede formar a los representantes?

(A) 28 (B) 195 (C) 200 (D) 100 (E) 190

24. Sonia escribe cuatro números en la pizarra: 5, 7, x, 17. Los promedios de cada dos números de estos cuatro números son $6, 8, 9, 11, 12$ y 14. ¿Cuál es el promedio de los cuatro números que escribió Sonia?

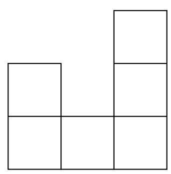
(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25 (E) 26

25. En la figura, ¿Cuál es el valor de $\alpha+\beta+\theta+\gamma$?.

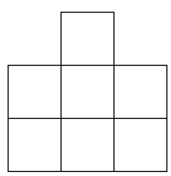


(A) 135° (B) 270° (C) 405° (D) 300° (E) 600°

26. Se tomaron dos fotos de una construcción hecha de cubos, una del costado izquierdo de la construcción:



Otra foto de frente:



¿Cuál es el máximo número posible de cubos que se pueden usar en la construcción?

(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

27. La suma de cuatro números enteros positivos diferentes es 100. El mayor de estos cuatro números enteros es m. El valor más pequeño posible de m es

(A) 25 (B) 26 (C) 27 (D) 28 (E) 94

28. Sea

$$1, 8, 27, 64, \ldots$$

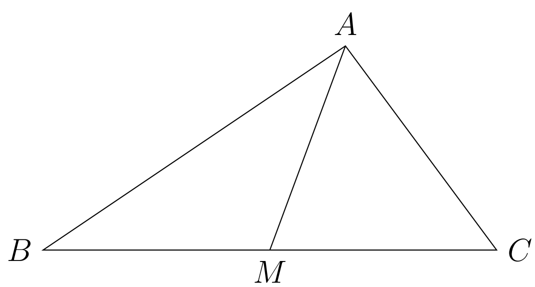
la sucesión de los cubos de los enteros positivos. El número 20^{21} es un término de esta sucesión. ¿Cuál es el término de la sucesión que está después de 20^{21}?

(A) 20^{22} (B) $(20^7+1)^3$ (C) $(20^{21}+1)^3$ (D) 21^{21} (E) $(20^7)^3+1$

29. En un campeonato de futsal participaron cuatro equipos, cada equipo jugó cotra todos los demás una sola vez. Cada equipo obtuvo 3 puntos por partido ganado, 1 puntos por partido empatado y 0 puntos por partido pedido. La puntuación total final fue: 7 puntos para el equipo A, 4 puntos para el equipo B, 3 puntos para el equipo C y 3 puntos para el equipo D. ¿Cuál fue el resultado del partido de A contra B?

    (A) Ganó A.
    (B) Ganó B.
    (C) Empataron.
    (D) Depende del partido entre B y C.
    (E) Depende del resultado entre C y D.

30. En el diagrama:



M es el punto medio de BC, $\angle AMC = 40°$ y $\angle ABC = 20°$. Encontrar el valor de $\angle ACB$.

(A) 70° (B) 60° (C) 50° (D) 80° (E) 85°

31. Una sucesión de 567 números enteros positivos consecutivos tiene una suma que es un cubo perfecto. Encuentre la suma positiva más pequeña posible de estos 567 números.

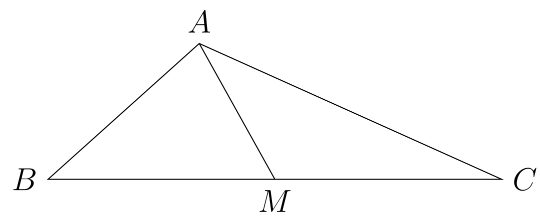
(A) 343 (B) 9261 (C) 740088 (D) 250047 (E) 567^3

32. Las casillas de una cuadrícula de 43×43 se colorean con 4 colores, llamados 1, 2, 3 y 4, siguiendo el patrón indicado en la figura. ¿Qué color se usó más que los otros tres?

1	2	3	4	1	2		$\cdots$	
2	3	4	1	2	3		$\cdots$	
3	4	1	2	3			$\cdots$	
4	1	2	3				$\cdots$	
1	2	3					$\cdots$	
2	3						$\cdots$	
							$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
							$\cdots$	

(A) 1 (C) 3 (E) Ninguno

(B) 2 (D) 4



33. En la figura:
    M es el punto medio de BC, $AM = 3$, $AB = 4$ y $AC = 8$. ¿Cuál es el valor de BC?
    (A) $2\sqrt{29}$
    (B) $2\sqrt{31}$
    (C) 10
    (D) $4 + 2\sqrt{13}$
    (E) No hay suficiente información para encontrar BC.

34. Marycel elige tres número enteros positos m, n, p.
    Hebe calcula $m + \frac{n}{p}$ y encuentra 66.
    Hernán calcula $\frac{m}{p} + n$ y encuentra 159.
    Patricia calcula $\frac{m+n}{p}$. ¿Qué número encontró Patricia?
    (A) 225 (B) 14 (C) 202 (D) 224 (E) 15

Parte II

Clave de Respuestas

4. Claves de la categoría α

1. (D)
2. (D)
3. (D)
4. (B)
5. (D)
6. (D)
7. (B)
8. (A)
9. (E)

5. Claves de la categoría β

10. (D)
11. (B)
12. (C)
13. (B)
14. (B)
15. (B)
16. (D)
17. (D)
18. (A)
19. (B)
20. (E)
21. (A)

6. Claves de la categoría γ

22. (C)
23. (B)
24. (A)
25. (B)
26. (E)
27. (C)
28. (B)
29. (C)
30. (A)
31. (D)
32. (C)
33. (B)
34. (E)

Parte III

Soluciones

7. Soluciones de la categoría α

1. Un adolescente con entrenamiento en lectura lee 160 palabras en 1/2 minuto. ¿Cuántas palabras leerá este adolescente en 1/2 hora?

   (A) 960 (B) 640 (C) 3200 (D) 9600 (E) 1600

   Solución 1. En un minuto lee $2 \times 160 = 320$, entonces en $1/2 hora$ que son 30 minutos leerá $30 \times 320 = 9600$ palabras.

   Solución 2. Llamemos a x el número de palabras en un determinado tiempo. Aplicando la regla de tres simple.

160 palabras	$\longrightarrow$	1/2 minutos
x	$\longrightarrow$	30 minutos (1/2 hora)

   Así, $x = 2 \times 160 \times 30 = 9600$ palabras.

   $$\boxed{\text{Respuesta (D) } 9600}$$

2. Si m es un número par, ¿Cuál de las siguientes expresiones resulta número impar? (A) $m-4$ (B) $m(m-1)$ (C) $2(m+1)$ (D) $3m+1$ (E) $m(m+1)+m$

   Solución 1. Recordamos que suma o resta de pares es par, suma o resta de impares es par y la suma o resta de un par con impar es impar. Por esto $m-4$ es par. El producto de un par por cualquier número es par. Por esto $m(m-1)$ es par y también $2(m+1)$. También $3m$ es par y al suma 1 obtenemos impar. Finalmente $m(m+1)$ es par y m es par, por tanto su suma $m(m+1)+m$ es par.

   Solución 2. Un número par es definido por $x = 2k$ y un número impar es definido por $x = 2k-1$ con k un número entero. Analicemos cada opción:

   Opción(A): $m-4 = 2k-4 = 2q$ es par, con $q = k-4$.

   Opción(B): $m(m-1) = 2k(2k-1) = 2q$ es par, donde $q = k(2k-1)$.

   Opción(C): $2(m+1) = 2k(2k+1) = 2q$ es par, donde $q = k(2k+1)$.

   Opción(D): $3m+1 = 3(2k)+1 = 2(q)+1$ es impar, donde $q = 3k$.

   Opción(E): $m(m+1)+m = 2k(2k+1)+2k = 2(k(2k+1)+k) = 2q$ es par, donde $q = k(2k+1)+k$.

   Por tanto, la expresión que representa un número impar es $m+1$.

   $$\boxed{\text{Respuesta (D) } 3m+1}$$

3. Determina el número que representa el punto en la siguiente recta numérica.

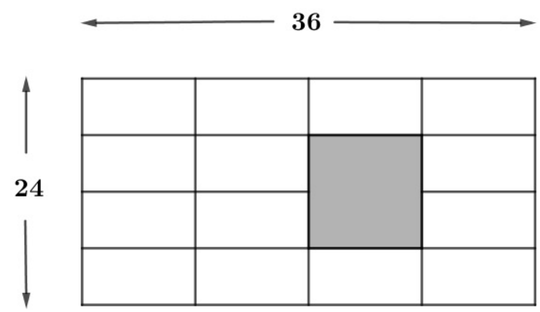
(A) $\frac{1}{5}$ (B) 6 (C) $\frac{6}{10}$ (D) $\frac{6}{5}$ (E) 1

Solución. Como se ve en la figura del 0 al 1 esta dividido en 5 partes iguales, de los cuales estas 5 partes representa a la unidad. De la misma manera de 1 a 2 esta dividido en 5 partes iguales de tal manera tomamos una parte (i.e. 1/5). Así el número que representa ese punto de la recta numérica es igual a:

$$1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

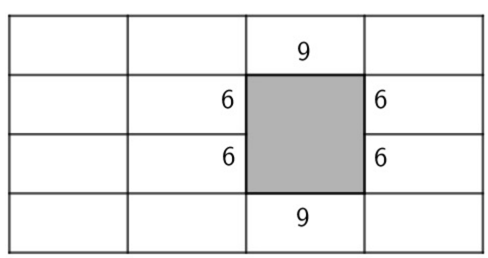
$\boxed{\text{Respuesta (D) } \frac{6}{5}}$

4. Una hoja de papel rectangular que mide 24×36 es dividida en partes iguales como se muestra en la figura ¿Cuál es el perímetro del rectángulo sombreado?



(A) 40 (B) 42 (C) 48 (D) 108 (E) 51

Solución. El ancho de los rectángulos pequeños es igual a $\frac{24}{4} = 6$ y el largo (o longitud) del rectángulo es igual a $\frac{36}{4} = 9$.



Por tanto, el perímetro buscado es $6 + 6 + 9 + 6 + 6 + 9 = 42$.

$\boxed{\text{Respuesta (B) } 42}$

5. Marycel cuenta los números del 1 al 100 y aplaude si el número que dice es múltiplo de 3 o termina en 3. ¿Cuántas veces aplaudirá Marycel en total?

(A) 30 (B) 33 (C) 36 (D) 39 (E) 43

Solución 1. Primeramente hacemos una lista de los números del 1 al 100. Luego marcamos los números múltiplos de 3 (color verde) y los números que términan en 3 (color rojo), así como se puede ver en la siguiente gráfica:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	8 84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

haciendo el conteo correspondiente de todos los circulos marcados con color verde y rojo, nos da 39. Esto significa que Marycel aplaudirá 39 veces.

Solución 2. Los múltiplos de 3 del 1 al 100, son $3, 6, 9, \ldots, 99$ que son 33 números. Nos falta adicionar números que terminen en 3 que no se hayan considerado, de

$$3, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93$$

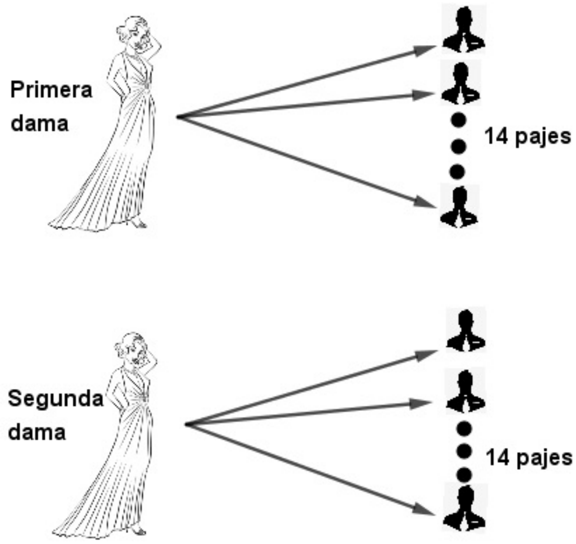
por el criterio de divisibilidad por 3, debemos adicionar a la lista $13, 23, 43, 53, 73, 83$ que son 6. En total Marycel, aplaude $33 + 6 = 39$ veces.

$\boxed{\text{Respuesta (D) 39}}$

6. En una fiesta de 15 años, la corte de la quinceañera está formada por 14 damas(mujeres) y 14 pajes (varones), la quinceañera tiene la difícil tarea de formar parejas. ¿De cuantas maneras puede formar parejas la quinceañera?

(A) 28 (B) 144 (C) 182 (D) 196 (E) 27

Solución. Para una dama, hay 14 pajes, que formarían 14 parejas posibles. Para una segunda dama hay 14 pajes, que formaría 14 parejas posibles nuevamente, tal como se ve en la siguiente figura.



Pero como son 14 damas, entonces la quinceañera podrá formar:

$$\underbrace{14 + 14 + ... + 14}_{14 veces} = 14 \times 14 = 196 \text{ parejas}$$

$$\boxed{\text{Respuesta (D) 196}}$$

7. Don Pedro desea comprar un auto a batería para niños como regalo navideño para su hijo, el costo del auto es de 2100 Bs. Si Don Pedro tiene a disposición 10 billetes de 100 Bs., 5 billetes de 200 Bs. y 4 billetes de 50 Bs. ¿De cuántas formas puede cancelar la compra Don Pedro?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Solución 1. Don Pedro tiene disponible los siguiente billetes:

Sabemos que Don Pedro debe pagar por el auto 2100 Bs, como la suma del total a disposición de Don Pedro es 2200 Bs., las formas a cancelar el total son:

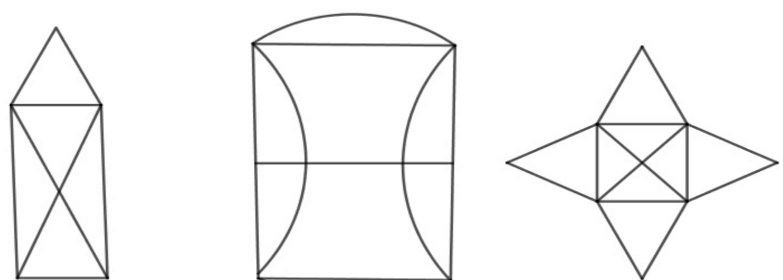
- Los 5 billetes de 200Bs. 9 billetes de 100Bs. y 4 billetes de 50Bs.
- 5 billetes de 200Bs. 10 billetes de 100Bs. y 2 billetes de 50Bs.

Luego hay dos formas de cancelar por el auto.

Solución 2. Don Pedro debe pagar por el auto 2100 Bs, y suma del total a disposición de don Pedro es 2200 Bs. Entonces, las formas de pagar esa cantidad es equivalente a las formas de reunir 100 Bs., que son sólo dos. Sacando un billete de 100 Bs. o dos de 50 Bs.

$$\boxed{\text{Respuesta (B) 2}}$$

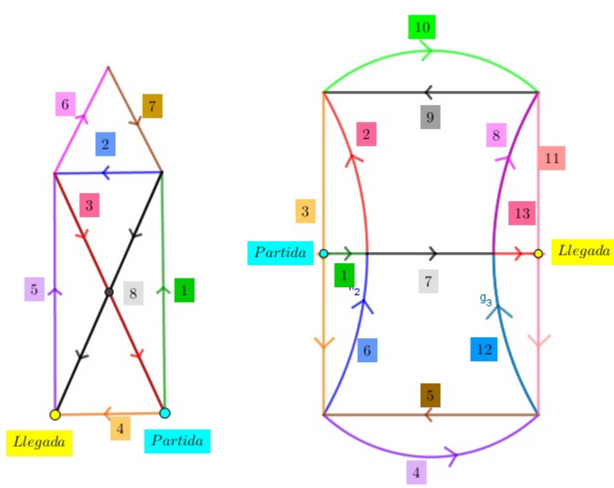
8. ¿Qué figuras se pueden realizar de un sólo trazo y sin levantar el lápiz del papel?



(I) (II) (III)

(A) (I) y (II) (B) (II) y (III) (C) (I) y (III) (D) Sólo (I) (E) Sólo (II)

Solución. Como se puede apreciar en la imagen las dos figuras que se pueden realizar sin levantar el lápiz y sin repetir son (I) y (II), con excepción de la figura (III) ya que faltaría por trazar un borde, pues es igual que la figura (I) pero este tiene tres bordes mas que la figura (I).



(I) (II)

No es posible trazar (III). Cada vez que línea significa que se llega a un punto o se sale de un punto, entonces cada vez que sea posible hacer un dibujo de este tipo solamente pueden haber dos puntos con un número impar de líneas que concurren a ese punto, el punto de inicio y el punto final. En este dibujo hay cuatro.

$$\boxed{\text{Respuesta (A) (I) y (II)}}$$

9. En cierto mes hubo tres martes que correspondieron a fechas pares. ¿Qué día de la semana fue el 21 de ese mes?

(A) Miércoles (B) Jueves (C) Viernes (D) Sábado (E) Domingo

Solución 1. El hecho de que una semana tenga siete días hace que si un día de la semana es par la siguiente vez que ese mismo día tenga fecha par es 14 días después. Esto solamente es posible, si el primer martes es 2. Si fuese 4 los días no son suficientes. Entonces 16 es martes, de donde es fácil ver que el 21 es domingo.

Solución 2. Comenzando el primer día del mes en lunes, como se aprecia en la figura se puede ver que el día 21 es domingo.

Lunes	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**	**Viernes**	**Sábado**	**Domingo**
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Si suponemos que el primer día del mes es martes entonces este mes tendría 2 martes pares, ahora si suponemos que el primer día del mes es miércoles de igual manera este mes tendría 2 martes con fechas pares.

Con lo que podemos concluir que en un mes a lo sumo puede tener 5 martes de los cuales 3 son pares y 2 impares o 2 martes pares y 3 impares, y si en el mes hay 4 martes 2 son pares y 2 son impares.

Por tanto, el único día, de la fecha 21 del mes es domingo.

$$\boxed{\text{Respuesta (E) Domingo}}$$

8. Soluciones de la categoría β

10. Hallar el valor de E si

$$E = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1295}+\sqrt{1296}}$$

(A) 31 (B) 32 (C) 33 (D) 34 (E) 35

Solución. Racionalizamos cada sumando.

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{4-5} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}} \cdot \frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}{\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}$$

de forma similar procedemos con los demás sumandos, así tenemos:

$$E = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{-1} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{-1} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{7}}{-1} + \ldots + \frac{\sqrt{1295}-\sqrt{1296}}{-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{7}+\ldots+\sqrt{1295}-\sqrt{1296}}{-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{4}-\sqrt{1296}}{-1} = \frac{2-36}{-1} = \frac{-34}{-1} = 34$$

$$\boxed{\text{Respuesta (D) } E = 34}$$

11. Sabiendo que en este año 2021, la suma de las edades actuales de los tres miembros de una familia es 69. Si la edad actual de la madre quintuplica la edad del hijo y hace tres años la edad del padre era diez veces la edad del hijo. El año en que nació el hijo es:

(A) 2010 (B) 2015 (C) 2007 (D) 2011 (E) 2021

Solución. Sean x, y, z las edades actuales de la madre, padre e hijo respectivamente.

Por condición del problema:

$$\begin{cases} x+y+z=69 \\ x=5z \\ y-3=10(z-3) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema tenemos $z=6$ años, así el año en que nació el hijo es $2021-6=2015$

$$\boxed{\text{Respuesta (B) 2015}}$$

12. ¿Cuál es la suma de todos los enteros positivos n que dejan 15 como residuo al dividir 141 entre n?

(A) 250 (B) 260 (C) 270 (D) 280 (E) 290

Solución. Si dividimos 141 entre n, tenemos un cociente q y resto 15. Esto es:

$$141 = nq + 15 \text{ entonces } nq = 126$$

Por tanto n debe ser un divisor de 126, que sea mayor a 15. así los casos para n son: 18, 21, 42, 63 y 126. Sumando tenemos 270.

$\boxed{\text{Respuesta (C) 270}}$

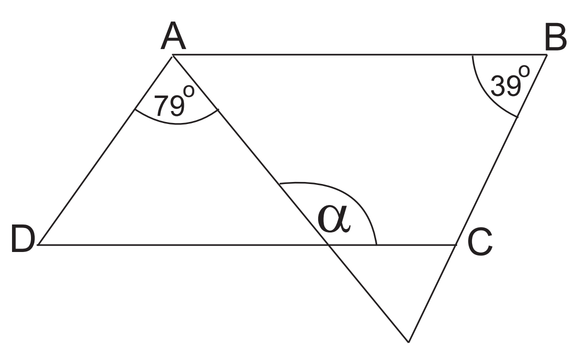
13. En una maratón hubo más de 1000 corredores. El 40 % fueron mujeres y participaron 260 hombres más que mujeres. La cantidad de corredores en total es:

(A) 1100 (B) 1300 (C) 1320 (D) 1340 (E) 1360

Solución. La cantidad de hombres en la maratón es $100\,\% - 40\,\% = 60\,\%$, por tanto participó un 20 % mas de hombres que de mujeres, y esta cantidad es de 260, así el número total corredores es: $\dfrac{260}{0{,}2} = 1300$.

$\boxed{\text{Respuesta (B) 1300}}$

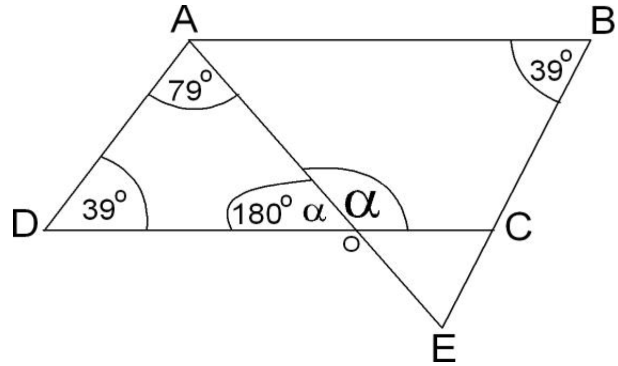
14. Considere el paralelogramo $ABCD$, Cuánto vale α



(A) 116° (B) 118° (C) 120° (D) 122° (E) 124°

Solución. Consideremos la siguiente figura:

Sea O el punto de intersección entre los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{DC}$. Ahora como $ABCD$ es un paralelogramo, entonces $\angle ADC = \angle ABC$.



Por otro lado en la figura, se puede aplicar el ángulo complementario de α.
Finalmente en el triángulo ADO tenemos que la suma de sus ángulos internos es 180º, así:
$79° + 39° + 180° - \alpha = 180°$ así $\alpha = 118°$

$$\boxed{\text{Respuesta (B) } \alpha = 118°}$$

15. En un curso de una unidad educativo hay 30 estudiantes alineados en 5 filas y 6 columnas. Cada estudiante le da la mano a todos los estudiantes que se sientan a su lado, incluyendo los que se sientan diagonalmente a su lado. ¿Cuántos saludos hubo?.

(A) 79 (B) 89 (C) 99 (D) 109 (E) 110

Solución. Los 4 estudiantes que están en las esquinas saludan a 3 estudiantes cada uno.

En los bordes, pero no en las esquinas hay 14 estudiantes que saludan a 5 estudiantes. Cada uno de los estudiantes que no están en el borde, que son 12 saludan a 8 estudiantes.

Sumando todos estos saludos, tendremos el doble del total, ya que cada saludo se contó dos veces, Así tenemos:

$$\frac{4 \cdot 3 + 14 \cdot 5 + 12 \cdot 8}{2} = 89 \text{ saludos}$$

$$\boxed{\text{Respuesta (B) } 89}$$

16. Sí $3^{y+2} - 3^y = 2^x + 2^{x+1}$, donde x, y son enteros. El valor de $x + y$ es:

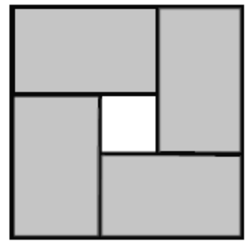
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Solución. Tomamos el primer miembro de la ecuación $3^{y+2} - 3^y = 3^y(3^2 - 1) = 3^y \cdot 8 = 3^y \cdot 2^3$

Además en el segundo miembro $2^x + 2^{x+1} = 2^x \cdot 3$
Así tenemos $3^y \cdot = 2^x \cdot 3$
Entonces $y = 1$; $x = 3$
Así $x + y = 4$

$\boxed{\text{Respuesta (D) 4}}$

17. Considere la figura en la que se muestran cuatro rectángulos iguales dentro de un cuadrado. Si el perímetro de cada rectángulo es de 18 metros. ¿Cuál es el área del cuadrado original?.



(A) $36\ m^2$ (B) $49\ m^2$ (C) $64\ m^2$ (D) $81\ m^2$ (E) $100\ m^2$

Solución. Sean x, y los lados del rectángulo entonces $2(x+y)=18$, entonces $x+y=9$ que es el lado del cuadrado, así el área es $81\ [m^2]$

$\boxed{\text{Respuesta (D) } 81\ [m^2]}$

18. Sí $(a+b+c+d)^2 = 4(a+b)(c+d)$. Hallar el valor de

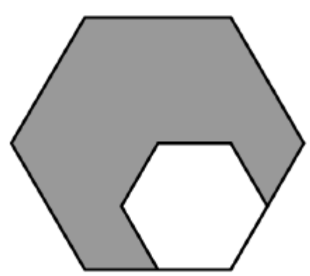
$$F = 27^{\frac{c+d}{3(a+b)}}$$

(A) 3 (B) 9 (C) 27 (D) 1 (E) -1

Solución. Sea $a+b=m$, $c+d=n$, entonces $(m-n)^2 = 4mn$ entonces $m^2-2mn+n^2=0$, entonces $(m-n)^2=0$ entonces $m=n$.
Así $a+b=c+d$.
Luego $F = 27^{\frac{c+d}{3(a+b)}} = 27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$.

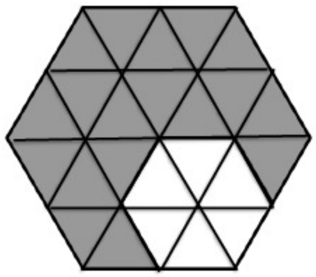
$\boxed{\text{Respuesta (A) } F=3}$

19. Considere la figura en donde se muestran dos hexágonos regulares. Los lados del hexágono grande miden el doble que los lados del hexágono pequeño. El hexágono pequeño tiene un área de $6\ cm^2$. El área del hexágono grande es:



(A) 16 cm^2 (B) 24 cm^2 (C) 28 cm^2 (D) 36 cm^2 (E) 44 cm^2

Solución: Consideremos la siguiente gráfica. Podemos dividir el hexágono en 24 triángulo equiláteros iguales como el hexágono menor, tiene el área del 6 cm^2, entonces cada triángulo tiene un área de 1 cm^2. por tanto el área del hexágono grande es 24 cm^2.



$\boxed{\text{Respuesta (B) } 24\ [cm^2]}$

20. ¿Cuántas veces aparece el dígito 9 en la lista de números:

$$1, 2, 3, 4, \ldots, 2020, 2021?$$

(A) 426 (B) 522 (C) 699 (D) 600 (E) 602

Solución 1. En las unidades, entre los números de 1 al 99, encontramos diez 9's; en las decenas hay diez 9's, en total son veinte 9's. Hay veinte 9's, lo mismo sucede en cada grupo de 100 hasta llegar a 999. Por tanto son $10 \times 20 = 200$, más los cien en las centenas, nos dan trescientos 9's entre 1 y 999. Como los mismo sucede entre 1000 y 1999, tenemos seiscientos 9's del 1 al 1999. Considerando los dos adicionales de 2009 y 2019, resultan en total 602 nueves.

Solución 2. Consideremos la secuencia $000, 001, 002, \ldots, 999$.

Son 1000 números y cada dígito se usa la misma cantidad de veces.

Entonces $\dfrac{3000}{10} = 300$

De 1000 a 1999, son también 300. Y los dos adicionales son de 2009 y 2019

Por tanto en número 9 aparece 602 veces en la lista.

$\boxed{\text{Respuesta (E) } 602}$

21. Sean x, y enteros positivos con $8 < x < 16$. Si

$$y(x^2 - 2000) + x(y^2 - 2000) = 0,$$

entonces $x + y$ es igual a:

(A) 210 (B) 2021 (C) 405 (D) 200 (E) 420

Solución. Tomamos $yx^2 - 2000y + xy^2 - 2000x = 0$

Operando $(x+y)(2000-xy) = 0$

Entonces $x+y=0$ ó $2000-xy=0$

Como x, y son enteros positivos entonces $2000-xy=0$ entonces $xy=2000 \Longrightarrow y = \frac{2000}{x}$ con $x \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

Así $x=10$; $y=200 \Longrightarrow x+y=210$

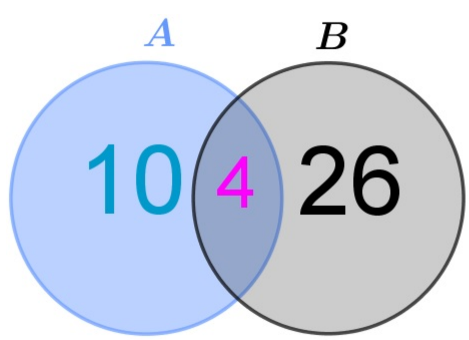
$\boxed{\text{Respuesta (A) 210}}$

9. Soluciones de la categoría γ

22. En una clase de 40 estudiantes, 14 tienen una tablet y 30 tienen un celular inteligente. ¿Cuántos estudiantes tienen ambos aparatos, si se sabe que todos tienen al menos uno de los dos?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

Solución: Consideremos con A el conjunto de los estudiantes que tiene una tablet, y B el conjunto de los estudiantes que tiene un celular inteligente.



En el gráfico podemos apreciar la cantidad de elementos que se encuentran en el conjunto A, en B y en la intersección de A y B. Por tanto la cantidad de estudiantes que tienen ambos aparatos es 4.

$\boxed{\text{Respuesta (C) 4}}$

23. En un Curso de 28 estudiantes la profesora debe mandar dos estudiantes en representación al curso formado por una niña y un niño, si se sabe que hay 15 niñas y 13 niños. ¿De cuántas maneras puede formar a los representantes?

(A) 28 (B) 195 (C) 200 (D) 100 (E) 190

Solución: Para mandar dos estudiantes, una niña puede ir con cualquier de los 13 niños; esto significa que hay 13 maneras de representar. Sin embargo tenemos 13 niñas, entonces por el principio de la multiplicación podemos afirmar que las maneras que puede formar a los representantes es de $14 \times 13 = 195$ maneras.

$$\boxed{\text{Respuesta (B) } 195}$$

24. Sonia escribe cuatro números en la pizarra: 5, 7, x, 17. Los promedios de cada dos números de estos cuatro números son $6, 8, 9, 11, 12$ y 14. ¿Cuál es el promedio de los cuatro números que escribió Sonia?

(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25 (E) 26

Solución. Al sacar los promedios de 4 números se usa cada uno de ellos exactamente tres veces. Entonces al realizar la suma de los promedios posibles $6+8+9+11+12+14 = 60$ sabemos que

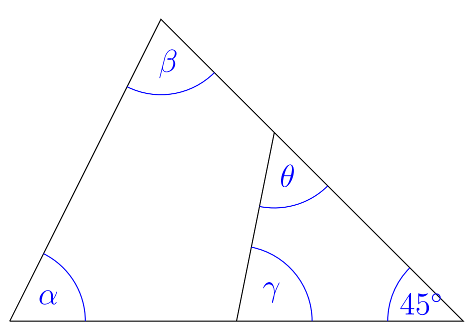
$$60 = 3\left(\frac{5}{2} + \frac{7}{2} + \frac{x}{2} + \frac{17}{2}\right) \tag{1}$$

De donde $40 = 5 + 7 + x + 17$, así $x = 11$. Entonces, el promedio de los cuatro números es

$$\frac{5 + 7 + 11 + 17}{4} = 10.$$

$$\boxed{\text{Respuesta (A) } 10}$$

25. En la figura, ¿Cuál es el valor de $\alpha + \beta + \theta + \gamma$?.



(A) 135° (B) 270° (C) 405° (D) 300° (E) 600°

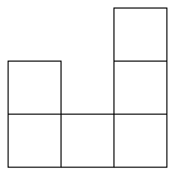
Solución. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, entonces $\alpha+\beta+45° = 180°$ y $\theta+\gamma+45° = 180°$. Sumando las ecuaciones:

$$(\alpha+\beta+45°)+(\theta+\gamma+45°) = 180°+180°$$
$$\alpha+\beta+\theta+\gamma = 360°-90°$$

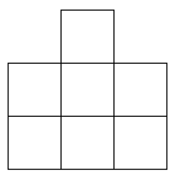
Así lo buscado es:

$$\boxed{\text{Respuesta (B)} \quad \alpha+\beta+\theta+\gamma = 270°}$$

26. Se tomaron dos fotos de una construcción hecha de cubos, una del costado izquierdo de la construcción:



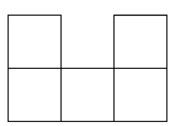
Otra foto de frente:



¿Cuál es el máximo número posible de cubos que se pueden usar en la construcción?

(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

Solución. En los costados lo máximo que puede haber es lo que se muestra en la figura, aquí abajo pues la pieza superior sólo se ve en el centro. Entonces el máximo es $5+5+6 = 16$.



$$\boxed{\text{Respuesta (E) 16}}$$

27. La suma de cuatro números enteros positivos diferentes es 100. El mayor de estos cuatro números enteros es m. El valor más pequeño posible de m es

(A) 25 (B) 26 (C) 27 (D) 28 (E) 94

Solución. Notamos que $100/4 = 25$. Entonces m no puede ser 25 porque entonces los otros no alcanzan para sumar 75 porque son diferentes. Veamos que m tampoco es 26, porque entonces la mayor suma posible con número diferentes sería $26+25+24+23 = 99$ y no es suficiente. Veamos que $m = 27$ sí es posible, por ejemplo $27 + 26 + 24 + 23 =$.

$$\boxed{\text{Respuesta (C) 27}}$$

28. Sea

$$1, 8, 27, 64, \ldots$$

la sucesión de los cubos de los enteros positivos. El número 20^{21} es un término de esta sucesión. ¿Cuál es el término de la sucesión que está después de 20^{21}?

(A) 20^{22} (B) $(20^7 + 1)^3$ (C) $(20^{21} + 1)^3$ (D) 21^{21} (E) $(20^7)^3 + 1$

Solución. Observamos que $20^{21} = (20^7)^3$, así que el cubo siguiente es $(20^7 + 1)^3$.

$$\boxed{\text{Respuesta (B) } (20^7 + 1)^3}$$

29. En un campeonato de futsal participaron cuatro equipos, cada equipo jugó cotra todos los demás una sola vez. Cada equipo obtuvo 3 puntos por partido ganado, 1 puntos por partido empatado y 0 puntos por partido pedido. La puntuación total final fue: 7 puntos para el equipo A, 4 puntos para el equipo B, 3 puntos para el equipo C y 3 puntos para el equipo D. ¿Cuál fue el resultado del partido de A contra B?

(A) Ganó A.

(B) Ganó B.

(C) Empataron.

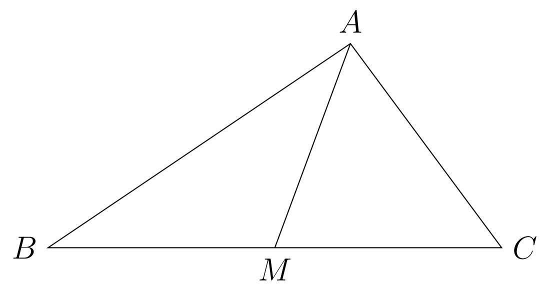
(D) Depende del partido entre B y C.

(E) Depende del resultado entre C y D.

Solución. El equipo A debe haber ganado dos juegos y empatado uno. Como B no pudo empatar 4 juegos, debe haber ganado uno, empatado uno y perdido uno. Entonces C y D deben haber ganado un juego cada uno y perdido los otros dos. Así A debe haber empatado con B.

$$\boxed{\text{Respuesta (C) Empataron}}$$

30. En el diagrama, M es el punto medio de BC, $\angle AMC = 40°$ y $\angle ABC = 20°$. Encontrar el valor de $\angle ACB$.



(A) 70° (B) 60° (C) 50° (D) 80° (E) 85°

Solución. Notamos que $\angle AMB = 180° - \angle AMC = 180° - 40° = 140°$. En un triángulo, la suma de los ángulos interiores es 180°, entonces

$$180° = \angle ABM + \angle AMB + \angle BAM = 20° + 140° + \angle BAM.$$

Así, $\angle BAM = 20°$. Entonces ABM es un triángulo isósceles porque tiene dos ángulos iguales, por tanto $AM = BM = MC$. En particular el triángulo AMC también es isósceles porque dos de sus lados miden lo mismo. Por tanto

$$180° = \angle AMC + 2\angle ACB = 40° + 2\angle ACB,$$

de donde $\angle ACB = 70°$.

$$\boxed{\text{Respuesta (A) } 70°}$$

31. Una sucesión de 567 números enteros positivos consecutivos tiene una suma que es un cubo perfecto. Encuentre la suma positiva más pequeña posible de estos 567 números.

(A) 343 (B) 9261 (C) 740088 (D) 250047 (E) 567^3

Solución. Sea $m+1, m+2, \ldots, n-1, n$ los 567 números enteros positivos. Entonces queremor encontrar el menor a entero positivo tal que

$$a^3 = (m+1) + (m+2) + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2}.$$

Entonces

$$2a^3 = n^2 + n - m^2 - m = (n-m)(n+m) + (n-m),$$

de donde

$$(n-m)(m+m+1) = 2a^3.$$

Pero $n - m = 567 = 3^4 \cdot 7$. Entonces

$$3^4 \cdot 7(n+m+1) = 2a^3.$$

Por tanto, el menor candidato para a es $a = 3^2 \cdot 7 = 63$ siempre que el sistema

$$\begin{cases} n - m &= 567 \\ n + m + 1 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 &= 882 \end{cases}$$

tenga soluciones enteras y positivas. Este es el caso, $m = 157$ y $n = 724$. Es decir,

$$158 + 159 + \cdots + 724 = 63^3 = 250047.$$

Respuesta (D) 250047

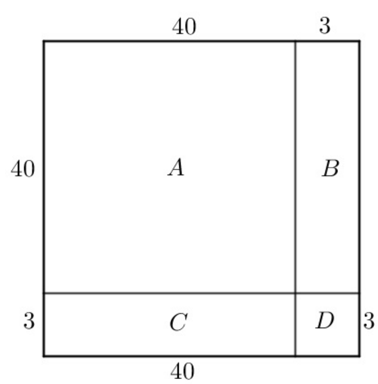
32. Las casillas de una cuadrícula de 43×43 se colorean con 4 colores, llamados 1, 2, 3 y 4, siguiendo el patrón indicado en la figura. ¿Qué color se usó más que los otros tres?

1	2	3	4	1	2		$\cdots$	
2	3	4	1	2	3		$\cdots$	
3	4	1	2	3			$\cdots$	
4	1	2	3				$\cdots$	
1	2	3					$\cdots$	
2	3						$\cdots$	
							$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
							$\cdots$	

(A) 1 (C) 3 (E) Ninguno

(B) 2 (D) 4

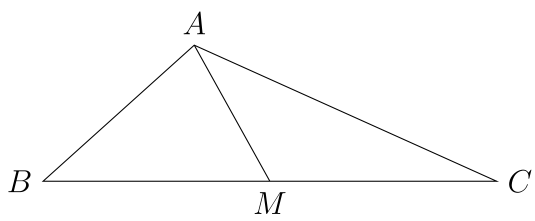
Solución: Dividamos el cuadrado en 4 rectángulos A, B, C y C uno de 40×40, otro de 3×40, otro de 40×3 y otro 3×3, como se indica en la figura. En las regiones A. B y C algún lado es múltiplo de 4, así que aparecen todos los colores igualmente. El cuadrado D es como se indica en la figura, así que el color que más aparece es el 3.



1	2	3
2	3	4
3	4	1

Respuesta (C) 3

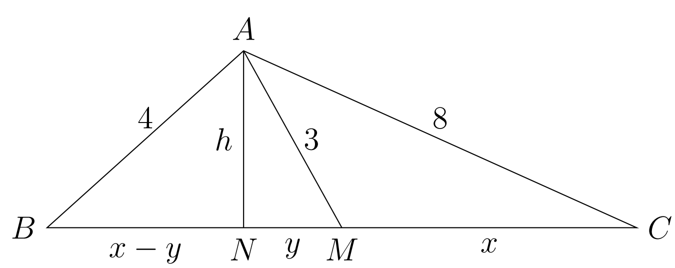
33. En la figura:



M es el punto medio de BC, $AM = 3$, $AB = 4$ y $AC = 8$. ¿Cuál es el valor de BC?

(A) $2\sqrt{29}$
(B) $2\sqrt{31}$
(C) 10
(D) $4 + 2\sqrt{13}$
(E) No hay suficiente información para encontrar BC.

Solución. Sea N el pie de la altura h del triángulo ABC. Sean $AM = MC = x$ y $NM = y$. Entonces tenemos



Usando el Teorema de Pitágoras tres veces, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} h^2 + (x+y)^2 & = & 64 \\ h^2 + y^2 & = & 9 \\ h^2 + (x-y)^2 & = & 16 \end{cases}$$

Restando dos veces la segunda ecuación de la suma de la primera y tercera ecuación obtenemos $2x^2 = 62$, de donde $x\sqrt{31}$. Por tanto $BC = 2\sqrt{31}$.

$$\boxed{\text{Respuesta (B) } 2\sqrt{31}}$$

34. Marycel elige tres número enteros positos m, n, p.
Hebe calcula $m + \dfrac{n}{p}$ y encuentra 66.
Hernán calcula $\dfrac{m}{p} + n$ y encuentra 159.
Patricia calcula $\dfrac{m+n}{p}$. ¿Qué número encontró Patricia?

(A) 225 (B) 14 (C) 202 (D) 224 (E) 15

Solución. Notamos que $\frac{n}{p}$ es entero, por tanto $n = Np$, similarmente $m = Mp$, con N, M enteros. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} pM + M &= 66 \\ M + pN &= 159 \end{aligned}$$

Sumando $(M + N)(p + 1) = 225 = 15^2$. Entonces $M + N$ es un divisor de 225 menor que 225 porque $p + 1$ es mayor que 1. De la lista solamente 15 es posible.

$\boxed{\text{Respuesta (E) 15}}$