



SOLUCIONARIO
CATEGORÍA α
PRUEBA PRIMERA FASE
AGOSTO 2022

AUTORES:

Dr. Fernando Vera
Dr. Victor Patty
MSc. Hernan Laime
MSc. Roberto Huaranca
MSc. Hugo Paredes

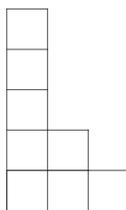
1. ¿En cuál de las alternativas aparece un número que esta entre $\frac{19}{3}$ y $\frac{55}{7}$?

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7 E. Ninguno

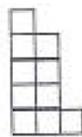
Solución. Notemos que $\frac{19}{3} = 6\frac{1}{3} < 7 < 7\frac{6}{7} = \frac{55}{7}$.

Respuesta. (D) 7

2. ¿Cuál es la pieza de rompecabeza que encaja con la figura dada, para formar un rectángulo?



(A)



(B)



(C)



(D)



(E)

Solución. Con la figura B) se forma un rectángulo de 6×3

Respuesta. (B)

3. ¿Cuántos resultados diferentes podemos obtener sumando dos números distintos del conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$?

A. 11 B. 15 C. 17 D. 18 E. 20

Solución. La mayor de las sumas posibles es $19 = 9 + 10$ y la menor es $3 = 1 + 2$. Es fácil ver que se pueden obtener todos los números entre esos dos valores.

Respuesta. (C)

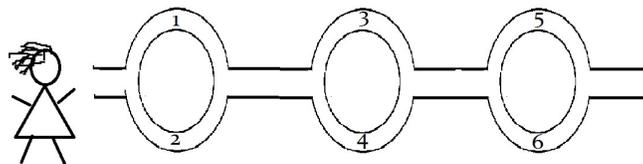
4. Cesar dibuja canguros: Uno azul, uno verde, uno rojo, uno negro, uno amarillo, uno azul, uno verde, uno rojo, etc. ¿De qué color es el 207° canguro?

A. Azul B. Verde C. Rojo D. Negro E. Amarillo

Solución. Los colores se repiten cada 5. Por otro lado $207 = 5 \times 41 + 2$ así al 207° canguro le toca el segundo color es decir, el verde.

Respuesta. (B)

5. Rita camina de izquierda a derecha y va poniendo en su mochila los números que se encuentra en su camino (Ver figura). ¿Cuáles de los siguientes números pueden estar en su mochilla?



- A. 1, 2 y 4 B. 2, 3 y 4 C. 2, 3 y 5 D. 1, 5 y 6
E. 1, 2 y 5

Solución. Como Rita camina de izquierda a derecha, no pueden estar juntos los números 1 y 2, ni 3 y 4, ni 5 y 6

Respuesta. (C) 2, 3 y 5

6. ¿Cuántos divisores enteros y positivos posee el número 360?

- A. 24 B. 25 C. 26 D. 27 E. 28

Solución 1. Los divisores de 360 son:

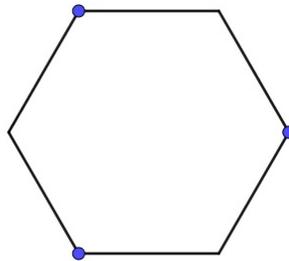
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360}

en total son 24.

Solución 2. Note que $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Los divisores enteros y positivos de 360 son los números de la forma $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$, con $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\beta \in \{0, 1, 2\}$ y $\gamma \in \{0, 1\}$. Hay $4 \times 3 \times 2 = 24$ maneras de escoger los exponentes α , β y γ . Por lo tanto 360 tiene 24 divisores.

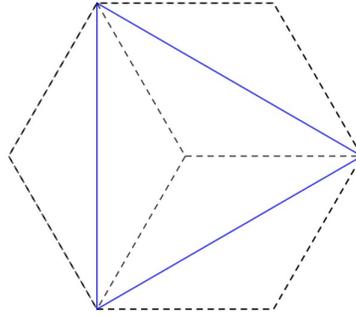
Respuesta. (A)

7. Un pedazo de papel que tiene la forma de hexágono regular, como se muestra en la figura, se dobla de manera que las tres esquinas marcadas se tocan en el centro del hexágono. ¿Qué figura se obtiene?



- A. Estrella de 6 picos B. Dodecágono C. Hexágono
D. Cuadrado E. Triángulo

Solución. Es un triángulo, como se muestra en la figura:



Respuesta. (E) Triángulo

8. ¿Cuál es el valor de $2^{2022} + 2^{2022} + 2^{2022} + 2^{2022} - 4^{1012}$?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4 E. 2022

Solución.

$$\begin{aligned}
 2^{2022} + 2^{2022} + 2^{2022} + 2^{2022} - 4^{1012} &= 4 \cdot 2^{2022} - 4^{1012} \\
 &= 4(2^2)^{1011} - 4^{1012} \\
 &= 4(4)^{1011} - 4^{1012} \\
 &= 4^{1012} - 4^{1012} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Respuesta. (A)

9. En la secuencia 1, 4, 3, -1, -4, -3, 1, 4, ... Cada término a partir del segundo es igual a la suma de sus dos vecinos por ejemplo

$$1 + 3 = 4, \quad 4 + (-1) = 3, \quad 3 + (-4) = -1$$

¿Cuál es la suma de los 2022 primeros términos de esa secuencia ?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4

Solución.

Notemos que $2022 = 6 \cdot 337$ esto significa que los primeros 2022 términos de la secuencia forman 337 bloques y cada uno de los bloques contiene a los 6 primeros números de la secuencia tal como se muestra abajo:

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{1, 4, 3, -1, -4, -3} & \underline{1, 4, 3, -1, -4, -3, \dots, 1, 4, 3, -1, -4, -3} & \underline{\hspace{10em}} \\
 \text{1}^\circ \text{ bloque} & \text{2}^\circ \text{ bloque} & \text{337}^\circ \text{ bloque}
 \end{array}$$

Finalmente, como la suma de los números en cada bloque es igual a cero, concluimos que la suma de los 2022 primeros números de la secuencia es igual a **cero**.

Respuesta. (A)

10. La profesora Lorena enseña a sus alumnos el siguiente producto notable. Para todo número real a y b ,

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Usando este hecho, calcular

$$S = 2022^2 - 2021^2 + 2020^2 - 2019^2 + \dots + 2^2 - 1^2$$

- A. 2045253 B. 2054253 C. 2450253 D. 2540253
 E. 2045523

Solución.

$$2022^2 - 2021^2 = (2022 + 2021)(2022 - 2021) = 2022 + 2021$$

$$2020^2 - 2019^2 = (2020 + 2019)(2020 - 2019) = 2020 + 2019$$

⋮

$$2^2 - 1^2 = (2 + 1)(2 - 1) = 2 + 1$$

Por lo tanto, sumando tenemos:

$$S = 2022 + 2021 + 2020 + 2019 + \dots + 2 + 1$$

$$S = 1 + 2 + \dots + 2019 + 2020 + 2021 + 2022$$

$$2S = \underbrace{2023 + 2023 + \dots + 2023 + 2023}_{2022\text{-veces}}$$

$$2S = 2022 \cdot 2023 \Rightarrow S = 1011 \cdot 2023 = 2045253$$

Respuesta. (A)