UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
CARRERA DE MATEMÁTICA

SOLUCIONARIO
CATEGORÍA β
PRUEBA PRIMERA FASE
AGOSTO 2022

Autores:

Dr. Fernando Vera
Dr. Victor Patty
MSc. Hernan Laime
MSc. Roberto Huaranca
MSc. Hugo Paredes

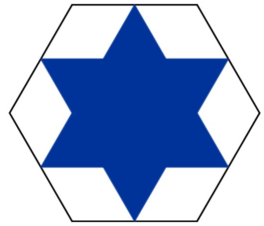
1. Manuel tiene triángulos y rectángulos de madera. Si en total sus piezas tienen 17 esquinas. ¿Cuántos triángulos tiene Manuel?

   A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

   Solución. Cada triángulo tiene 3 esquinas y cada rectángulo tiene 4. Como 17 no es múltiplo de 3, se tiene al menos un rectángulo. Además $17 - 4 = 13$ no es múltiplo de 3 se debe tener un rectangulo más. Como $13 - 4 = 9$ no es múltiplo de 4, debe haber al menos un triangulo. Como $9 - 3 = 6$ tampoco es múltiplo de 4, Manuel tiene necesariamente otro triángulo más y como sólo nos faltan por considerar $6 - 3 = 3$ esquinas, Manuel tiene un tercer triángulo.

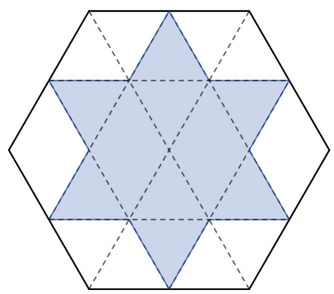
   Respuesta. (C)

2. La estrella de la figura toca cada lado del hexágono regular en el punto medio (los lados de la estrella son paralelos a los del hexágono). Si el área de la estrella es 6, ¿cuál es el área del hexágono?



A. 8 B. 9 C. 12 D. 15 E. 18

Solución. Si dividimos el hexágono en 6 triángulos equiláteros uniendo sus vértices con el centro, observamos que la estrella utiliza la mitad del área de cada triángulo. El área de la estrella es la mitad del área del hexágono.



$\boxed{\textbf{Respuesta. (C)}}$

3. Carmen tarda 35 minutos para ir a la escuela caminando y regresar a su casa en autobús, mientras que hacer el viaje completo en autobús le toma solamente 22 minutos. ¿Cuánto tarda Carmen en hacer el viaje de ida y vuelta caminando?

   A. 30 B. 40 C. 45 D. 48 E. 55

   Solución. Carmen tarda $\frac{22}{2} = 11$ minutos en hacer la mitad del recorrido en autobús, así que tarda $35 - 11 = 24$ minutos en hacer la mitad del recorrido caminando. Así, a Carmen le tomaría 48 minutos, ida y vuelta.

   $\boxed{\textbf{(D).}\ 48}$

4. Rafael hizo un examen de admisión para entrar a la universidad y obtuvo el 80 % de las respuestas correctas. Resulta que dejo sin contestar 5 preguntas pero que todas las

demás las respondió correctamente. ¿Cuántas preguntas tenia el examen?

A. 20 B. 25 C. 30 D. 35 E. 40

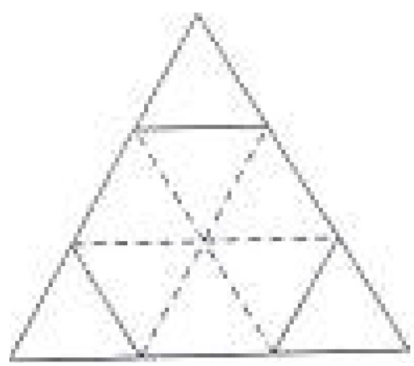
Solución. Sea x el número de preguntas del examen. Entonces $x-5=\frac{8}{10}x$. Resolver tenemos que $x=25$.

Respuesta. (B)

5. Si H es el área de un hexágono regular de lado 1 y T es el área de un triángulo equilátero de lado 3, ¿a qué es igual $\frac{H}{T}$?

A. $\frac{2}{3}$ B. 2 C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{3}{4}$ E. 1

Solución. Con el hexágono regular, formamos 6 triángulos equiláteros de lado 1. Cada uno de los triángulos pequeños de la figura tienen la misma área y tenemos entonces que $H=\frac{6}{9}T=\frac{2}{3}$



Respuesta. (A) $\frac{2}{3}$

6. La suma de las raíces de $4x^2+5-8x=0$ es igual a:

A. -2 B. -1 C. 0 D. 1 E. 2

Solución. Como $4x^2+5-8x=0$, tenemos que $x^2+\frac{-8}{4}x+\frac{5}{4}=0$. Así, la suma de las raíces de $4x^2+5-8x=0$ es igual a $-\frac{-8}{4}=2$.

Respuesta. (E)

7. Cuando $x^{20} + 22$ es dividido por $x - 1$, el resto es:

A. 23 B. 24 C. 25 D. 26 E. 27

Solución. Cuando $x^{20} + 22$ es dividido por $x - 1$, existe un polinomio $q(x)$ y un número real r tales que $x^{20} + 22 = q(x)(x - 1) + r$. Así, para $x = 1$, tenemos que $1^{20} + 22 = q(1)(1 - 1) + r$, es decir $r = 23$.

Respuesta. (A)

8.
$$\frac{2022^3 + 2011^3}{2022 \times 11 + 2011^2}$$
es igual a:

A. 4030 B. 4033 C. 4040 D. 4044 E. 3030

Solución. Como $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{2022^3 + 2011^3}{2022 \times 11 + 2011^2} &= \frac{(2022 + 2011)(2022^2 - 2022 \times 2011 + 2011^2)}{2022 \times 11 + 2011^2} \\
&= \frac{(4033)(2022(2022 - 2011) + 2011^2)}{2022 \times 11 + 2011^2} \\
&= \frac{(4033)(2022 \times 11 + 2011^2)}{2022 \times 11 + 2011^2} \\
&= 4033.
\end{aligned}$$

Respuesta. (B)

9. Evaluar la expresión

$$\frac{(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1) \dots (2^{2^{10}} + 1) + 1}{2^{26}}$$

A. 2^{2020} B. 2^{2021} C. 2^{2022} D. 2^{2023} E. 2^{2024}

Solución. Como $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{2^{10}}+1)+1 &= (2-1)(2+1)(2^2+1)\dots(2^{2^{10}}+1)+1\\
&= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{2^{10}}+1)+1\\
&= (2^4-1)(2^4+1)\dots(2^{2^{10}}+1)+1\\
&\vdots\\
&= (2^{2^{10}}-1)(2^{2^{10}}+1)+1\\
&= ((2^{2^{10}})^2-1)+1\\
&= (2^{2(2^{10})})\\
&= 2^{2(1024)}\\
&= 2^{2048}.
\end{aligned}$$

Así, obtenemos que

$$\frac{(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{2^{10}}+1)+1}{2^{26}} = \frac{2^{2048}}{2^{26}} = 2^{2022}$$

.

Respuesta. (C)

10. Simplificar:

$$G = \frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}}$$

.

A. $\frac{44}{45}$ B. $\frac{44}{47}$ C. $\frac{45}{44}$ D. $\frac{47}{44}$ E. $\frac{50}{51}$

Solución.

Sea k un número natural. Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} &= \frac{1}{(\sqrt{k+1})^2\sqrt{k}+(\sqrt{k})^2\sqrt{k+1}}\\
&= \frac{1}{(\sqrt{k+1}\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}\\
&= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}\sqrt{k}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}.
\end{aligned}$$

Luego, aplicando esta fórmula a cada término, obtenemos:

$$\begin{aligned}
G &= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{2024}} - \frac{1}{\sqrt{2025}}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{2025}} \\
&= 1 - \frac{1}{45} \\
&= \frac{44}{45}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Respuesta. (A)}}$