

## 19° OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA

Categoría  $\gamma$ 

## Primera Prueba OPMat 2021

1. En la sucesión de pares:

2, 2, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 6, 6, ... ,

¿Cuál es el término 2022?

A. 89 B. 90 C. 91 D. 92 E. 93

2. Sabiendo que  $x - \frac{1}{x} = 1$ , determine el valor numérico de

$$\left(x^{-x} - x^{-x^{-1}}\right) \left(x^{x^{-1}} + x^x\right).$$

A. 2 B. -2 C. 1 D. -1 E. 0

3. Los lados de un triángulo tienen longitudes 5, 12 y 13. ¿Cuál es la longitud de la menor de las tres alturas del triángulo?

A.  $\frac{50}{12}$  B.  $\frac{50}{12}$  C.  $\frac{50}{12}$  D.  $\frac{50}{12}$  E.  $\frac{50}{12}$

4. ¿Cuántos números entre 100 y 500 tienen en su escritura al dígito 3?

A. 156 B. 157 C. 158 D. 159 E. 160

5. Sea  $f$  una función de los números reales en los números reales. Suponga que para cualquier número real  $x$  se satisface

$$3f(1-x) - f(x) = 3x^2 - 1.$$

Encuentre el valor de  $f(0)$ .

A. 0 B.  $\frac{5}{8}$  C.  $\frac{12}{5}$  D. 1 E. 12

6. Calcule:

$$\sqrt{(2019)(2020)(2021)(2022) + 1}$$

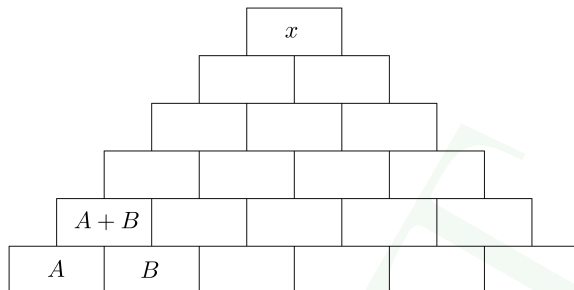
A. 2021 B. 2022 C.  $2022^2$  D. 4082419 E. 4082420

7. Encuentre el valor de:

$$\sqrt{1 + 2018\sqrt{1 + 2019\sqrt{1 + (2020)(2022)}}}$$

A. 2017 B. 2018 C. 2019 D. 2020 E. 2021

8. Se escribe cada uno de los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en una de las casillas de la base de una pirámide. En cada una de las casillas superiores se pone la suma de los números de las dos casillas que la “sostienen”, tal y como se ilustra en el diagrama. Se sigue así hasta obtener un sólo número  $x$  en la casilla superior. ¿Cuál es el menor valor que puede tener  $x$ ?



- A. 70   B. 71   C. 73   D. 76   E. 81

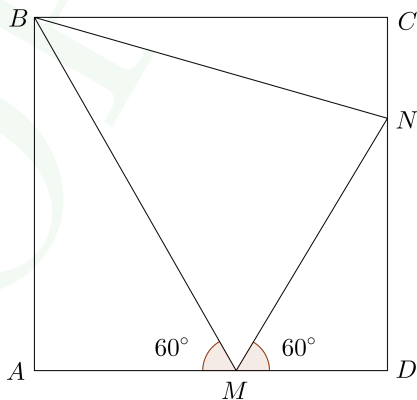
9. Si  $(x, y)$  es una solución del sistema

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x^2y + xy^2 + x + y = 63 \end{cases}$$

Determine el valor de  $x^2 + y^2$ .

- A. 69   B. 70   C. 71   D. 72   E. 73

10. En la siguiente figura se considera el cuadrado  $ABCD$



Si  $\angle AMB = 60^\circ$  y  $\angle DMN = 60^\circ$ , calcule  $\angle MBN$ .

- A.  $20^\circ$    B.  $25^\circ$    C.  $30^\circ$    D.  $40^\circ$    E.  $45^\circ$