SOLUCIONARIO
CATEGORÍA γ
PRUEBA PRIMERA FASE
AGOSTO 2022

Autores:

Dr. Fernando Vera
Dr. Victor Patty
MSc. Hernan Laime
MSc. Roberto Huaranca
MSc. Hugo Paredes

1. En la sucesión de pares:

$$2,\ 2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ \ldots,$$

¿Cuál es el término 2022?

A. 89 B. 90 C. 91 D. 92 E. 93

Solución. Usando la fórmula

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = n(n + 1),$$

para determinar el término 2022, es suficiente determinar el menor número natural $2n$ que cumpla

$$n(n + 1) \geq 2022;$$

buscamos dicho natural por inspección. Tenemos:

$$\begin{aligned} n = 43 &\Rightarrow 43 \times 44 = 1892 \\ n = 44 &\Rightarrow 44 \times 45 = 1980 \\ n = 45 &\Rightarrow 45 \times 46 = 2070; \end{aligned}$$

se sigue que el término 2022 es $2 \times 45 = 90$.

$$\boxed{\textbf{Respuesta. (B)}}$$

2. Sabiendo que $x - \frac{1}{x} = 1$, determine el valor numérico de

$$\left(x^{-x} - x^{-x^{-1}}\right)\left(x^{x^{-1}} + x^{x}\right).$$

A. 2 B. -2 C. 1 D. -1 E. 0

Solución. Usando las propiedades de exponentes tenemos

$$\begin{aligned}
\left(x^{-x} - x^{-x^{-1}}\right)\left(x^{x^{-1}} + x^{x}\right) &= \left(\frac{1}{x^x} - \frac{1}{x^{\frac{1}{x}}}\right)\left(x^{\frac{1}{x}} + x^{x}\right) \\
&= \left(\frac{x^{\frac{1}{x}} - x^x}{x^x x^{\frac{1}{x}}}\right)\left(x^{\frac{1}{x}} + x^{x}\right) \\
&= \frac{x^{\frac{2}{x}} - x^{2x}}{x^x x^{\frac{1}{x}}} \\
&= \frac{x^{2(x-1)} - x^{2x}}{x^x x^{x-1}} \\
&= \frac{x^{-2} - 1}{x^{-1}} \\
&= \frac{1}{x} - x \\
&= -1. \blacksquare
\end{aligned}$$

Respuesta. (D)

3. Los lados de un triángulo tienen longitudes 5, 12 y 13. ¿Cuál es la longitud de la menor de las tres alturas del triángulo?

A. $\frac{50}{12}$ B. $\frac{55}{12}$ C. $\frac{50}{13}$ D. $\frac{55}{13}$ E. $\frac{60}{13}$

Solución. Ya que los lados del triángulo son 5, 12 y 13, notemos que el Teorema de Pitágoras es válido: $13^2 = 5^2 + 12^2$, se sigue que el triángulo es rectángulo. Como debemos calcular la menor altura, necesitamos calcular la altura sobre el mayor de los lados, la hipotenusa. El área del triángulo es $\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$, si h es la altura sobre la hipotenusa obtenemos

$$30 = \frac{1}{2} \times h \times 13,$$

luego $h = \frac{60}{13}$. $\blacksquare$

Respuesta. (E)

4. ¿Cuántos números entre 100 y 500 tienen en su escritura al dígito 3?

A. 156 B. 157 C. 158 D. 159 E. 160

Solución. Entre 100 y 129 hay exactamente 3 números que tienen al dígito 3, entre 130 y 139 todos los números tienen al menos un dígito 3 y, entre 140 y 199 hay exactamente 6 números que tienen un dígito 3. Se sigue que entre 100 y 200 existen 19 números que tienen un dígito 3. Análogamente, entre 201 y 299 existen otros 19 números que tienen un dígito 3. Entre 300 y 399 todos los números tienen un dígito 3, en total 100. Finalmente, entre 400 y 500 existen otros 19 números que tienen un dígito 3. Finalmente, entre 100 y 500 existen $19+19+100+19 = 157$ números que tienen como dígito al número 3. ■

$\boxed{\textbf{Respuesta. (B)}}$

5. Sea f una función de los números reales en los números reales. Suponga que para cualquier número real x se satisface

$$3f(1-x) - f(x) = 3x^2 - 1.$$

Encuentre el valor de $f(0)$.

A. 0 B. $\dfrac{5}{8}$ C. $\dfrac{12}{5}$ D. 1 E. 12

Solución. Ya que la igualdad $3f(1-x)-f(x) = 3x^2-1$ es válida para cada valor de x, podemos tomar x como $1-x$, tenemos así $3f(x)-f(1-x) = 3(1-x)^2-1 = 3x^2-6x+2$. En la segunda ecuación del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3f(1-x) - f(x) = 3x^2 - 1 \\ 3f(x) - f(1-x) = 3x^2 - 6x + 2 \end{cases}$$

multiplicamos por 3 y luego sumamos ambas ecuaciones miembro a miembro, obtenemos $8f(x) = 12x^2 - 18x + 5$, se sigue que $f(0) = \dfrac{5}{8}$.

$\boxed{\textbf{Respuesta. (B)}}$

6. Calcule:

$$\sqrt{(2019)(2020)(2021)(2022) + 1}$$

A. 2021 B. 2022 C. 2022^2 D. 4082419 E. 4082420

Solución. Notemos

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= n(n+3)\big[(n+1)(n+2)\big]+1 \\ &= n(n+3)\big[n^2+2n+n+2\big]+1 \\ &= n(n+3)\big[n^2+3n+2\big]+1 \\ &= n(n+3)\big[n(n+3)+2\big]+1 \\ &= n^2(n+3)^2+2n(n+3)+1 \\ &= \big[n(n+3)+1\big]^2 \end{aligned}$$

Entonces, para $n=2019$, tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{(2019)(2020)(2021)(2022)+1} &= \sqrt{\big[(2019)(2022)+1\big]^2} \\ &= (2019)(2022)+1 \\ &= 4082419 \end{aligned}$$

$$\boxed{\textbf{Respuesta. (D)}}$$

7. Encuentre el valor de:

$$\sqrt{1+2018\sqrt{1+2019\sqrt{1+(2020)(2022)}}}$$

A. 2017 B. 2018 C. 2019 D. 2020 E. 2021

Solución. Notemos que

$$(x-1)(x+1)+1 = x^2-1+1$$

Entonces para $x=2021$, tenemos

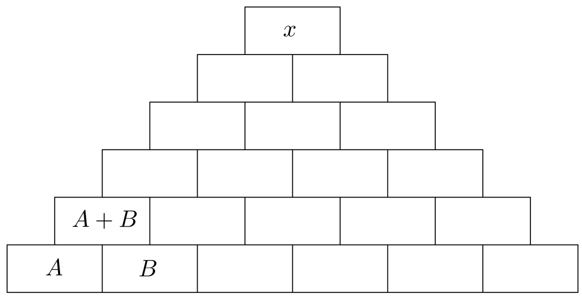
$$(2021-1)(2021+1)+1 = 2021^2$$

así

$$\begin{aligned} \sqrt{1+2018\sqrt{1+2019\sqrt{2021^2}}} &= \sqrt{1+2018\sqrt{1+2019\cdot 2021}} \\ &= \sqrt{1+2018\sqrt{2020^2}} \\ &= \sqrt{1+2018\cdot 2020} \\ &= \sqrt{2019^2} \\ &= 2019 \end{aligned}$$

$$\boxed{\textbf{Respuesta. (C)}}$$

8. Se escribe cada uno de los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en una de las casillas de la base de una pirámide. En cada una de las casillas superiores se pone la suma de los números de las dos casillas que la “sostienen”, tal y como se ilustra en el diagrama. Se sigue así hasta obtener un sólo número x en la casilla superior. ¿Cuál es el menor valor que puede tener x?



A. 70 B. 71 C. 73 D. 76 E. 81

Solución. Llamemos A, B, C, D, E, F, a los números de la base.

A	B	C	D	E	F

Al ir completando las siguientes filas, los números colocados en los extremos (A y F) aparecen al final solo una vez. B y E cinco veces cada uno; C y D diez veces cada uno.

Por tanto: $x = A + 5B + 10C + 10D + 5E + F$.

Para que x sea tenga el menor valor posible es necesario que los que más veces aparecen sean los menores: C y D, 1 o 2; B y E, 3 o 4; A y F, 5 o 6.

La menor suma será: $5+5\times3+10\times1+10\times2+5\times4+6 = 76$.

Respuesta. (D)

9. Si (x, y) es una solución del sistema

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x^2y + xy^2 + x + y = 63 \end{cases}$$

Determine el valor de $x^2 + y^2$.

A. 69 B. 70 C. 71 D. 72 E. 73

Solución.

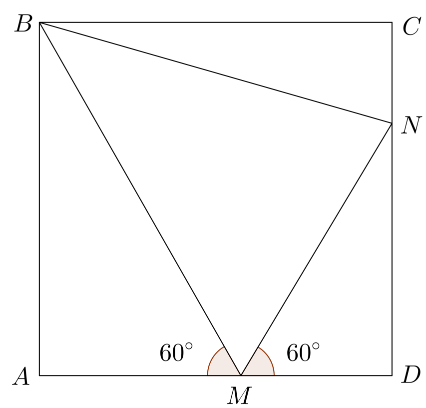
$$
\begin{aligned}
63 &= x^2y + xy^2 + x + y \\
&= xy(x+y) + (x+y) \\
&= 6(x+y) + (x+y) \\
&= 7(x+y)
\end{aligned}
$$

Por tanto, $x + y = 9$. Así,

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \\
&= 81 - 12 \\
&= 69
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textbf{Respuesta. (A)}}$

10. En la siguiente figura se considera el cuadrado $ABCD$

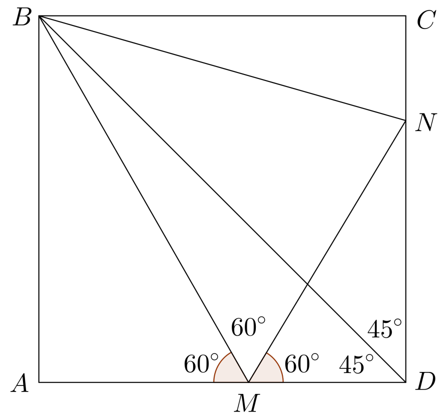


Si $\angle AMB = 60°$ y $\angle DMN = 60°$, calcule $\angle MBN$.

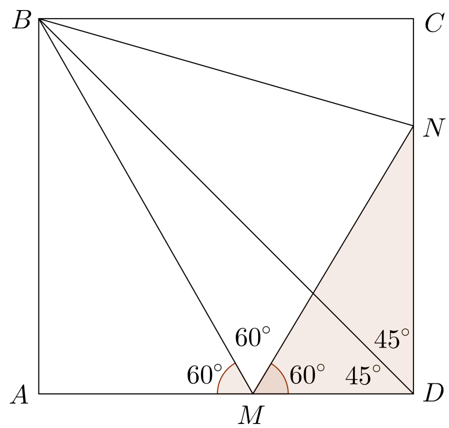
A. 20^0 B. 25^0 C. 30^0 D. 40^0 E. 45^0

Solución 1.

Observe que $\angle BMN = (180 - 60 - 60)° = 60°$. En particular, MB es una bisectriz del ángulo AMN. Si trazamos el segmento $\overline{BD}$ vemos que dicho segmento es bisectriz del ángulo recto ADC.



Concluimos que el punto B es el excentro del triángulo MND. Esto implica que NB es necesariamente una bisectriz del ángulo MNC.



Como la suma de los ángulos internos del triángulo MDN debe ser 180°, obtenemos que

$$\angle MNC = \angle DMN + \angle MDN = (60 + 90)^\circ$$

y por lo tanto $\angle MNB = \angle MNC/2 = 75^\circ$. Finalmente, la suma de los ángulos internos del triángulo BMN es 180° para concluir que $\angle MBN = (180 - 60 - 75)^\circ = 45^\circ$.

Solución 2.

Sea $BM = a$, $NM = b$. Sea $\alpha = \angle MBN$. El triángulo ABM es de ángulos $30^0, 60^0$ y 90^0, luego $AB = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ y $AM = \dfrac{a}{2}$. Del mismo modo el triángulo MND es de ángulos $30^0, 60^0$ y 90^0, así $MD = \dfrac{b}{2}$. Se sigue entonces que: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2}$, de donde $b = (\sqrt{3} - 1)a \quad (*)$.

Aplicando el teorema de los senos en el triángulo BMN, tenemos:

$$\frac{a}{\sin(120-\alpha)} = \frac{b}{\sin\alpha}$$

junto con (*), tendremos: $\frac{\sin\alpha}{\sin(60+\alpha)} = \sqrt{3}-1$, ya que si $x+y=180^0$, entonces $\sin x = \sin y$.

Pero $\sin(60+\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \dfrac{1}{2}\sin\alpha$, así:

$$\frac{1/2\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$$

de donde $\cot\alpha = 1$, así $\alpha = 45^0$.

$\boxed{\textbf{Respuesta. (E)}}$