20a Olimpiada Paceña de Matemática

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Universidad Mayor de San Andrés

SEGUNDA FASE

Prueba de clasificación

PREGUNTAS Y SOLUCIONES

Categoría α "alfa"

1ro y 2do de Secundaria

Septiembre del 2023

Preguntas

Problema 1. *Suponga que* a, b, c *y* d *son dígitos que pueden ser* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ *o* 9. *Sabiendo que* $a > c > b$ *y se cumple la relación*

$$\begin{array}{rcccc} & & a & b & c \\ \times & & & & 6 \\ \hline & d & 3 & 4 & 4 \end{array}$$

determinar el valor de $a \times c - b$.

(A) 30 (B) 27 (C) 28 (D) 29 (E) 26

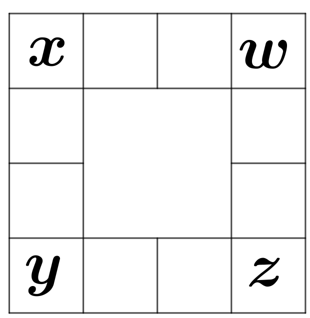
Problema 2. *Los ceros escritos a la izquierda de un entero positivo se llaman ceros innecesarios por que no alteran su valor; por ejemplo, el número* 0001 *contiene* 3 *ceros innecesarios y el número* 0010 *contiene* 2 *ceros innecesarios. En la siguiente sucesión de números*

$$0001,\ 0002,\ 0003,\ 0004,\ 0005, \ldots,\ 2022,\ 2023,$$

¿cuántos ceros innecesarios fueron escritos?

(A) 1107 (B) 1500 (C) 2000 (D) 1000 (E) 1255

Problema 3. *En la siguiente figura, distribuir los números del* 1 *al* 12, *en cada casilla, de tal forma que no se repita un número y que la suma de los números que se encuentran en cada lado del cuadrado sea igual a* 22. *Determinar la suma de* $x + y + z + w$.



(A) 14 (B) 12 (C) 10 (D) 17 (E) 19

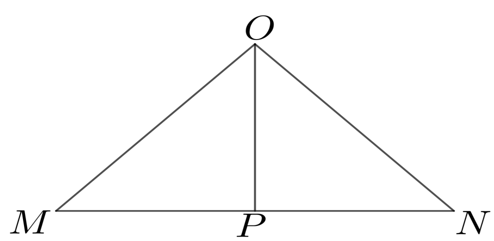
Problema 4. *En una fiesta de carnavales,* 127 *personas están disfrazadas. En cierto momento hay* 13 *hombres y* 24 *mujeres que no están bailando, sabiendo que los hombres que están bailando lo hacen con dos mujeres, ¿cuántos hombres hay en la fiesta?*

(A) 33 (B) 43 (C) 29 (D) 15 (E) 55

Problema 5. *Cada una de las caras de un cubo está pintada con uno de seis colores distintos: azul, verde, amarillo, naranja, rojo y negro. La imagen muestra tres imágenes del cubo desde diferentes ángulos. ¿De qué color está pintada la cara que es opuesta a la cara pintada de color negro?*

(A) Negro (B) Azul (C) Amarillo (D) Naranja (E) Rojo

Problema 6. *Si en la siguiente figura trazamos* 50 *rectas diferentes que sean paralelas al segmento* MN*, que intersecten al segmento* OP *y que no pasan por los puntos* O *y* P*, ¿cuántos triángulos se contarán en total?*



Problema 7. *Determine el dígito de las unidades del siguiente número que se obtiene luego de realizar las potenciaciones y las sumas*

$$A = 12^{12} + 13^{13} + 14^{14} + 15^{15}.$$

Problema 8. *Un número es un cuadrado si es el producto de dos enteros idénticos; por ejemplo, los números* $1, 4$ *y* 9 *son cuadrados pues* $1 = 1 \times 1$, $4 = 2 \times 2$, *y* $9 = 3 \times 3$. *Si entre dos cuadrados consecutivos hay veinte números impares, incluyendo los extremos, ¿cuánto es la suma de dichos cuadrados? Note que, los cuadrados* 4 *y* 9 *son consecutivos.*

Problema 9. *En un cuadrilátero convexo* $\square ABCD$ *se tiene* $\angle BAC = \angle BDA$ *y* $\angle BAD = \angle ADC = 60°$. *Determine la longitud del segmento* AD *si se conoce que* $AB = 14$ *y* $CD = 6$.

Soluciones

Solución. (del Problema 1) Los posibles valores de c son 4 o 9 pues $6 \times 9 = 54$ y $6 \times 4 = 24$; ya que no existe un digito a que cumpla $a > 9$, tenemos que c no puede ser 9, por lo que $c = 4$. El dígito b necesariamente es 2 pues $(6 \times 2) + 2 = 14$ y $c > 2$. Con el mismo razonamiento, el valor de a debe ser 7 pues $(6 \times 7) + 1 = 43$ y $7 > c > b$. Así tenemos $a \times c - b = 7 \times 4 - 2 = 26$.

Respuesta. 26 (Opción: E.)

Solución. (del Problema 2) Contamos los ceros innecesarios en la siguiente forma: entre 1 y 9 existen $9 \times 3 = 27$ ceros innecesarios; entre 10 y 99 existen $90 \times 2 = 180$ ceros innecesarios; entre 100 y 999 existen $900 \times 1 = 900$ ceros innecesarios. Así, tenemos un total de $27+180+999 = 1107$.

Respuesta. 1107 (Opción: A.)

Solución. (del Problema 3) La distribución de los números se realiza en la siguiente imagen:

1	**12**	**7**	**2**
8			**11**
10			**5**
3	**6**	**9**	**4**

La suma buscada es $x + y + z + w = 10$.

Respuesta. 10 (Opción: C.)

Solución. (del Problema 4) Sabemos que son 37 las personas que no están bailando: 13 hombres y 24 mujeres; por tanto, hay 90 personas que sí están bailando. Como los hombres bailan con dos mujeres, de los 90, 30 son hombres. Luego, hay 43 hombres en la fiesta.

	Mujeres	Hombres	total
Bailan	60	30	90
No bailan	24	13	37

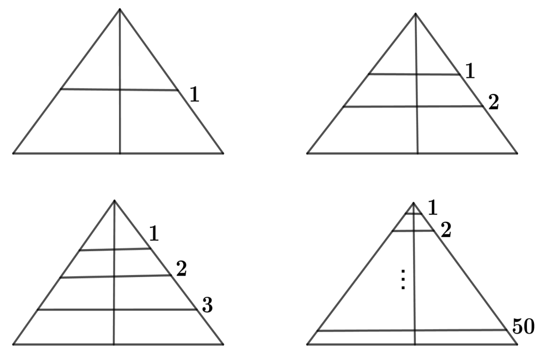
Respuesta. 43 (Opción: B.)

Solución. (del Problema 5) Notemos que, la cara de color naranja tiene un borde común a las caras: azul, verde, amarillo y rojo. Ya que una cara tiene exactamente cuatro bordes y una cara opuesta, la cara restante, la de color negro, es la cara opuesta a la cara de color naranja.

Respuesta. $Naranja$ (Opción: D.)

Solución. (del Problema 6) Estudiemos los primeros casos:

Para **una recta** el número de triángulos es $6 = 3 \times 2$.
Para 2 **rectas** el número de triángulos es $9 = 3 \times 3$.
Para 3 **rectas** el número de triángulos es $12 = 3 \times 4$.
Para 4 **rectas** el número de triángulos es $15 = 3 \times 5$.
Razonando de este modo deducimos que:
Para 50 **rectas** el número de triángulos es $153 = 3 \times (50 + 1)$.



Respuesta. 153

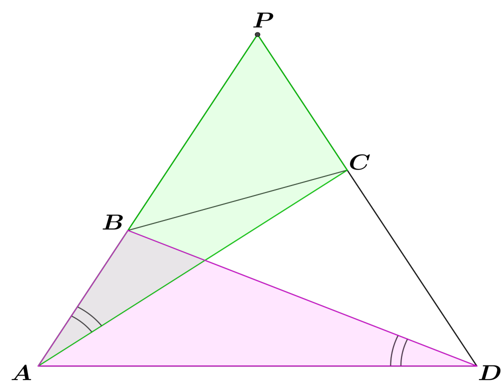
Solución. (del Problema 7) Realizamos el cálculo de manera directa: ya que $(12)^2 = 144$ y ya que
$$12^{12} = 12^{6\times 2} = 12^2 \times 12^2 \times 12^2 \times 12^2 \times 12^2 \times 12^2,$$
el dígito de las unidades de 12^{12} es el dígito de las unidades de $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ que es 6. Ahora, como $13^2 = 169$ y ya que
$$13^{13} = 13^{(6\times 2)+1} = 13^2 \times 13^2 \times 13^2 \times 13^2 \times 13^2 \times 13^2 \times 13,$$
el dígito de las unidades de 13^{13} es el dígito de las unidades de $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 3$ que es 3. Por otro lado, siendo $14^2 = 196$ y ya que
$$14^{14} = 14^{7\times 2} = 14^2 \times 14^2 \times 14^2 \times 14^2 \times 14^2 \times 14^2 \times 14^2,$$
el dígito de las unidades de 14^{14} es el dígito de las unidades de $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$ que es 6. Finalmente, como $15^2 = 225$ y ya que
$$15^{15} = 15^{(7\times 2)+1} = 15^2 \times 15^2 \times 15^2 \times 15^2 \times 15^2 \times 15^2 \times 15^2 \times 15,$$
el dígito de las unidades de 15^{15} es el dígito de las unidades de $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ que es 5. Así, el dígito de las unidades de $A = 12^{12} + 13^{13} + 14^{14} + 15^{15}$ es el dígito de las unidades de la suma $6 + 3 + 6 + 5 = 20$ que es 0.

Respuesta. 0

Solución. (del Problema 8) Entre los números cuadrados $1 = 1^2$ y $4 = 2^2$ hay sólo un número impar: 3. Entre los números cuadrados $4 = 2^2$ y $9 = 3^2$ hay dos números impares: 5 y 7. Entre los números cuadrados $9 = 3^2$ y $16 = 4^2$ hay tres números impares: $11, 13$ y 15. Deducimos que, entre los números cuadrados $400 = 20^2$ y $441 = 21^2$ hay 20 números impares. Así, la suma de estos cuadrados es $20^2 + 21^2 = 841$.

$\boxed{\text{Respuesta. 841}}$

Solución. (del Problema 9) Extendamos los segmentos AB, CD y denotemos por P al punto de intersección. Como $\angle PAD = \angle ADP = 60°$, el triángulo $\triangle ADP$ es equilátero. Ya que $AP = AD$, $\angle APC = 60° = \angle DAB$ y $\angle PAC = \angle ADB$, los triángulos $\triangle APC$ y $\triangle DAB$ son congruentes (idénticos), por lo tanto, $PC = AB = 14$, y $AD = PD = PC + CD = 14 + 6 = 20$.



$\boxed{\text{Respuesta. 20}}$

Olimpiada Paceña de Matemática
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: opmatumsa@fcpn.edu.bo
http://opmat.fcpn.edu.bo/