20a Olimpiada Paceña de Matemática

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática
Facultad de Ciencias Puras y Naturales,
Universidad Mayor de San Andrés.

PRIMERA FASE

Prueba de clasificación

PREGUNTAS Y SOLUCIONES

Categoría β "beta"

3^{ro} y 4^{to} de Secundaria

Agosto del 2023

Preguntas

Problema 1. *Si a representa un dígito en base 10 y se sabe que cumple la relación*

$$\overline{a11} + \overline{11a} + \overline{1a1} = 777,$$

donde, por ejemplo: $\overline{a11} = a \times 10^2 + 1 \times 10 + 1$; *hallar el valor del dígito a.*

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

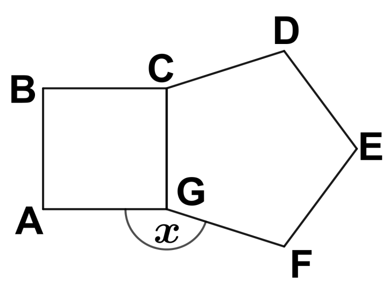
Problema 2. *Al encontrar el valor de la diferencia*

$$20232023^2 - 20232022^2,$$

determine la suma de sus dígitos.

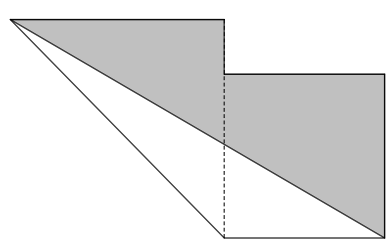
(A) 23 (B) 24 (C) 25 (D) 26 (E) 27

Problema 3. *En la siguiente figura, determinar el valor del ángulo x, si los polígonos son regulares.*



(A) 158° (B) 168° (C) 162° (D) 108° (E) 90°

Problema 4. *La figura está formada por un triángulo isósceles y un cuadrado, el triángulo y el cuadrado están unidos por uno de sus lados, el lado del triángulo mide 8 cm y del cuadrado mide 6 cm, ¿cuál es el área de la región gris?*



(A) 40 cm^2 (B) 41 cm^2 (C) 42 cm^2 (D) 43 cm^2 (E) 44 cm^2

Problema 5. *¿ Cuál de las siguientes expresiones es igual a* $\sqrt{9+2\sqrt{14}}$ *?*

(A) $2\sqrt{7}$ (B) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ (C) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) $3+\sqrt{7}$

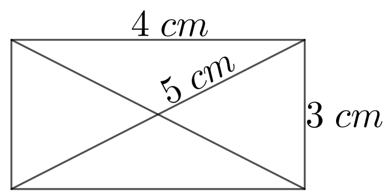
Problema 6. *Esmeralda escribió (correctamente) todos los números del* 1 *al* 999, *uno atrás de otro:*

$$12345678910111213\cdots997998999.$$

¿Cuántas veces aparece el agrupamiento "21", en ese orden?

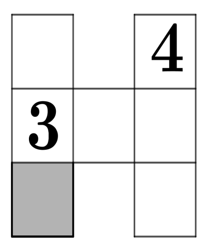
(A) 10 (B) 100 (C) 31 (D) 210 (E) 2023

Problema 7. *En la siguiente figura, hay un rectángulo con sus respectivas diagonales. Calcular la menor distancia que debe recorrer la punta de un lápiz sin levantar de la hoja, para dibujar la figura.*



(A) 29 cm (B) 28 cm (C) 27 cm (D) 30 cm (E) 25 cm

Problema 8. *Escribe los números del* 1 *al* 7 *en los cuadrados de la figura, un número por cada cuadrado, no puedes repetir un mismo número en dos cuadrados distintos; además, la suma de los tres números en cada una de las tres filas de cuadrados (dos verticales y una horizontal) debe ser la misma. ¿Cuál de las siguientes opciones puede ir en el cuadrado gris?*



(A) 4 (B) 2 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Problema 9. *El promedio de 40 números es 25. Eliminando 60 y 66, que son dos de estos números, ¿cuánto es el promedio de los que quedan?*

(A) 19 (B) 20 (C) 21 (D) 22 (E) 23

Problema 10. *La suma de* 6 *números impares consecutivos excede al doble del mayor en* 46. *Hallar la suma de dichos números.*

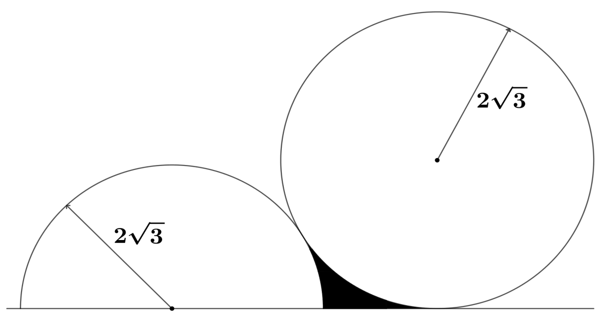
(A) 80 (B) 84 (C) 72 (D) 61 (E) 19

Problema 11. *Para construir el arreglo rectángular de la figura siguiente se sigue un cierto patrón o regla. El arreglo tiene 2023 filas. ¿Cuántas veces la letra O aparece en el arreglo?*

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & & & O \\
 & & & & & & & O & P \\
 & & & & & & O & P & M \\
 & & & & & O & P & M & A \\
 & & & & O & P & M & A & T \\
 & & & O & P & M & A & T & O \\
 & & O & P & M & A & T & O & P \\
 & O & P & M & A & T & O & P & M \\
O & P & M & A & T & O & P & M & A \\
\vdots & & & \vdots & & & & & \vdots
\end{array}
$$

(A) 410265 (B) 10000 (C) 404023 (D) 4092529 (E) 210265

Problema 12. *Determinar el área de la región sombreada*



(A) $\pi/2$ (B) $(2\sqrt{3}-\pi)$ (C) $\sqrt{3}-2\pi$ (D) $3(2\sqrt{3}-\pi)$ (E) $\pi/4$

Soluciones

Solución. (Del problema 1) Al expresar el númerro $\overline{a11}$ en base 10 tenemos $\overline{a11} = a \times 10^2 + 1 \times 10 + 1$; de modo similar, los números $\overline{11a}$ y $\overline{1a1}$, en base 10, se expresan como $\overline{11a} = 1 \times 10^2 + 1 \times 10 + a$ y $\overline{1a1} = 1 \times 10^2 + a \times 10 + 1$, respectivamente. Así, la relación en el enunciado se escribe como

$$(100a + 10 + 1) + (100 + 10 + a) + (100 + 10a + 1) = 777,$$

que se reduce a la ecuación lineal $111a + 222 = 777$ cuya solución es $a = \dfrac{777 - 222}{111} = 5$.

$\boxed{\text{Respuesta. } 5 \text{ (Opción: C.)}}$

Solución. (Del problema 2) Usando productos notables tenemos que

$$\begin{aligned} 20232023^2 - 20232022^2 &= (20232023 + 20232022) \times (20232023 - 20232022) \\ &= (40464045) \times (1) = 40464045; \end{aligned}$$

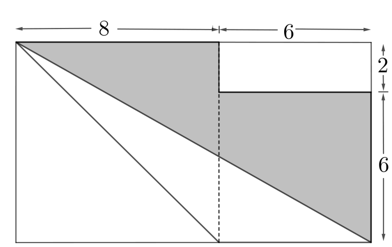
la suma de los dígitos del número 40464045 es $4 + 0 + 4 + 6 + 4 + 0 + 4 + 5 = 27$.

$\boxed{\text{Respuesta. } 27 \text{ (Opción: E.)}}$

Solución. (Del problema 3) La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$. El pentágono puede ser dividido en tres triángulos, por tanto, la suma de los ángulos internos de un pentágono es $3 \times 180° = 540°$. Ya que el pentágono es un polígono regular, cualquiera de sus ángulos internos tiene medida igual a $\frac{3 \times 180°}{5} = 108°$; además, un ángulo interno del cuadrado mide $90°$. Finalmente, el ángulo buscado mide $x = 360° - 108° - 90° = 162°$.

$\boxed{\text{Respuesta. } 162° \text{ (Opción: C.)}}$

Solución. (Del problema 4) Completemos la figura a un rectángulo cuyos lados miden $(8 + 6)$ cm y $(2 + 6)$ cm como se muestra en la figura. La mitad del área del este rectángulo es $\frac{(8+6)\times(2+6)}{2} = \frac{14\times 8}{2} = 56$; ya que el área del rectángulo pequeño es $6 \times 2 = 12$, el área de la región gris es $56 - 12 = 44$.



$\boxed{\text{Respuesta. } 44 \text{ cm}^2 \text{ (Opción: E.)}}$

Solución. (Del problema 5) Notemos que $9+2\sqrt{14} = 2+2\sqrt{2}\sqrt{7}+7 = (\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2 = (\sqrt{2}+\sqrt{7})^2$. Por lo tanto, $\sqrt{9+2\sqrt{14}} = \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2} = \sqrt{2}+\sqrt{7}$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } \sqrt{2}+\sqrt{7} \text{ (Opción: B.)}}$$

Solución. (Del problema 6) Veamos primero los agrupamientos "21" que se obtienen de un par de números consecutivos tal que el primero termina en 2 y el segundo comienza en 1, estos son:

$$1213, 102103, 112113, 122123, 132133, 142143, 152153, 162163, 172173, 182183, 192193,$$

en total 11 números. Veamos ahora los números que tienen el agrupamiento "21" en su representación decimal:

$$21, 121, 221, 321, 421, 521, 621, 721, 821, 921, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219,$$

en total 20 números. Así, la cantidad de veces que aparece "21" será $11+20=31$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 31 \text{ (Opción: C.)}}$$

Solución. (Del problema 7) Al recorrer la figura con la punta del lápiz, se deberá pasar por un lado dos veces para dibujar la figura completa; como se pide determinar la menor distancia recorrida, el lado a repetir debe ser el que mide 3 cm. Al sumar las longitudes recorridas por la punta del lápiz en la figura, la menor distancia será

$$3 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 4 \text{ cm} + 4 \text{ cm} = 27 \text{ cm}.$$

$$\boxed{\text{Respuesta. } 27 \text{ cm (Opción: C.)}}$$

Solución. (Del problema 8) Denotemos por S la suma de los valores de cada fila de cuadrados. Primero note que la suma de todos los números en los cuadrados es $1+2+3+4+5+6+7=28$. Denotemos por A al número que está en el cuadrado debajo del que contiene al 4. Notemos que los números 3 y A, por separado, están en dos filas de cuadrados, una horizontal y la otra vertical, así $3S = 3+A+28 = 31+A$. Se sigue que, los únicos valores posibles para A son 2 o 5 : dichos valores sumados a 31 dan múltiplo de 3. Tenemos dos casos:

Caso 1: Si $A=2$, tenemos $S=11$. En este caso podemos completar el arreglo de cuadrados así

1		4
3	6	2
7		5

Note que podemos intercambiar 1 y 7; sin embargo, 1 no forma parte de las posibles soluciones a marcar.

Caso 2: Si $A = 5$, se tiene $S = 12$. En este caso la fila que contiene al 4 y al 5 debería contener al número 3, esto no es posible ya que 3 está fijo en otra fila.

		4
3		5
		3

$\boxed{\text{Respuesta. } 7 \text{ (Opción: E.)}}$

Solución. (Del problema 9) Denotemos por $N_1, N_2, N_3, N_4, ..., N_{40}$ los 40 números cuyo promedio es 25, es decir, estos números satisfacen $\dfrac{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + ... + N_{40}}{40} = 25$ o bien,

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + ... + N_{40} = 25 \times 40.$$

Ya que los números 60 y 66 son algunos de estos, pensemos que son $N_1 = 60$ y $N_2 = 66$; de esta manera,

$$N_3 + N_4 + ... + N_{40} = 25 \times 40 - 60 - 66 = 874.$$

Entonces el promedio de los 38 números que quedan será $\dfrac{N_3 + N_4 + ... + N_{40}}{38} = \dfrac{874}{38} = 23.$

$\boxed{\text{Respuesta. } 23 \text{ (Opción: E.)}}$

Solución. (Del problema 10) Denotemos por x el primer número impar considerado en el problema, en este caso, los seis números impares consecutivos serán

$$x,\ (x+2),\ (x+4),\ (x+6),\ (x+8),\ (x+10).$$

Las suma de estos números impares satisface la ecuación

$$x + (x+2) + (x+4) + (x+6) + (x+8) + (x+10) = 2(x+10) + 46,$$

cuya solución $x = 9$. Por lo tanto, la suma de estos seis números impares consecutivos será $9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 84$.

$\boxed{\text{Respuesta. } 84 \text{ (Opción: B.)}}$

Solución. (Del problema 11) La primera diagonal de letras O contiene 2023 letras. La segunda diagonal inicia cinco filas abajo, por tanto, contiene $2023 - 5 = 2018$ letras; siguiendo ese patrón, la siguiente diagonal contiene 2013 letras O y la siguiente contiene 2008 letras. Ahora, la columna mayor tiene 2023 letras, y como OPMAT es un bloque de cinco letras, al efectuar la división conseguimos $2023 = 404 \times 5 + 3$, es decir, el número de veces en que la palabra OPMAT aparece completamente en la columna mayor es 404 y por tanto, la última diagonal de letras O contiene 3 letras. Obtenemos una progresión aritmética con 405 términos, de razón 5, cuya suma de términos es

$$2023 + 2018 + 2013 + \cdots + 13 + 8 + 3 = \frac{(2023 + 3) \times 405}{2} = 410265$$

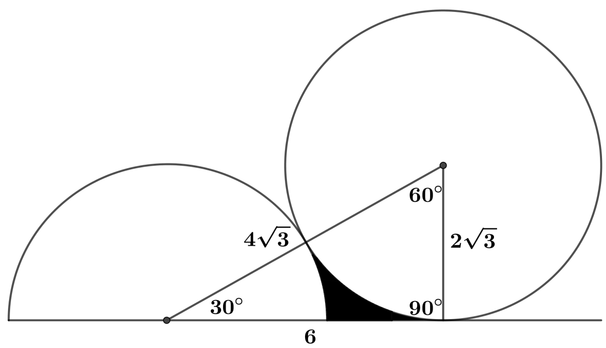
y representa el número de veces que la letra O aparece en el arreglo.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 410265 \text{ (Opción: A.)}}$$

Solución. (Del problema 12) Al unir los centros de cada circunferencia obtenemos un segmento de longitud $4\sqrt{3}$, que puede ser visto como la hipótenusa de un triángulo rectángulo con cateto $2\sqrt{3}$; el otro cateto lo determinamos usando el Teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{(4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6,$$

de este modo, los ángulos internos del triángulo rectángulo miden 30° y 60°, como se puede ver en la siguiente figura.



Ahora, las áreas de los sectores circulares correspondientes a los ángulos son

$$\frac{30^\circ}{360^\circ} \times \pi(2\sqrt{3})^2 = \pi \qquad \text{y} \qquad \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi(2\sqrt{3})^2 = 2\pi.$$

El área del triángulo que contiene a estos dos sectores circulares es $\frac{6 \times 2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$, luego el área de la región sombreada será $6\sqrt{3} - (2\pi + \pi) = 3(2\sqrt{3} - \pi)$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 3(2\sqrt{3} - \pi) \text{ (Opción: D.)}}$$

Olimpiada Paceña de Matemática
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: `opmatumsa@fcpn.edu.bo`
`http://opmat.fcpn.edu.bo/`