20a Olimpiada Paceña de Matemática
Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática
Facultad de Ciencias Puras y Naturales,
Universidad Mayor de San Andrés.

SEGUNDA FASE

Prueba de clasificación

PREGUNTAS Y SOLUCIONES

Categoría β “beta”

3^{ro} y 4^{to} de Secundaria

Carrera de Matemática

IIMAT

Septiembre de 2023

Preguntas

Problema 1. *En la siguiente suma, cada letra representa un dígito distinto que puede ser* $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ *o* 9,

$$\begin{array}{cccccc} & B & O & R & R & A & R \\ & & C & A & R & R & O \\ + & & & R & O & C & A \\ & & & C & A & R & A \\ & & S & A & C & R & A \\ \hline & 5 & 8 & 5 & 8 & 7 & 5 \end{array}$$

Sabiendo que la suma de los dígitos de cada columna es menor que 10, *determine el valor de* $A + C + R + O + S + B$.

(A) 10 (B) 15 (C) 21 (D) 28 (E) 34

Problema 2. *Una caja contiene 2020 bolos numerados del 3 al 2022. Hallar el menor número de bolos que se deben extraer al azar para asegurar que las numeraciones de al menos dos de los bolos extraídos cumplan la siguiente igualdad*

$$\boxed{2023} - \boxed{} = \boxed{}$$

sustituyendo el valor de uno de los bolos en la primera caja y el del otro en la segunda caja.

(A) 1014 (B) 1011 (C) 1012 (D) 1023 (E) 1019

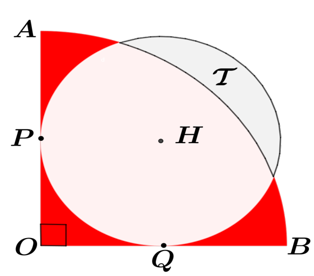
Problema 3. *Sabiendo que* x *e* y *son números enteros positivos que satisfacen la ecuación*

$$x^2 - y^2 - 14y = 150.$$

¿Cuál es el valor de $x - y$?

(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 11 (E) 9

Problema 4. *En la figura tenemos la cuarta parte de una circunferencia de centro* O *y otra circunferencia de centro* H, *siendo* P *y* Q *puntos medios de los segmentos* AO *y* BO, *respectivamente. Sabiendo que el área de la región sombreada* $\mathcal{T}$ *es* 16 m^2, *hallar el valor del área de color rojo.*



(A) 32 m^2 (B) 18 m^2 (C) 15 m^2 (D) 16 m^2 (E) 12 m^2

Problema 5. *Si n y k son enteros positivos que satisfacen la relación*

$$\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} = k^2 + n,$$

determine el posible valor de k.

(A) 8 (B) 9 (C) $n-1$ (D) $n+1$ (E) n

Problema 6. *Se suma los cuadrados de 10 números enteros positivos consecutivos y se le agrega la suma de los cubos de los siguientes 10 números enteros positivos consecutivos; ¿cuál es el dígito de las unidades del resultado?*

(A) 0 (B) 2 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Problema 7. *Dada la siguiente sucesión de números*

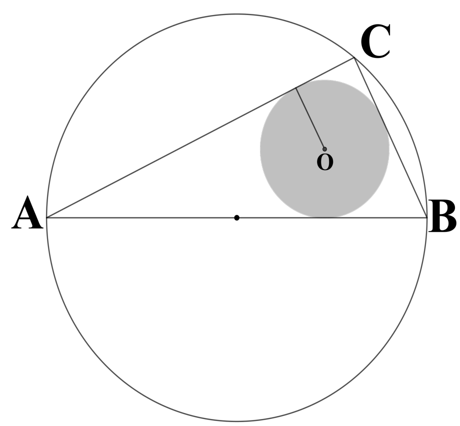
$$4,\ 9,\ 25,\ 49,\ \ldots,x^y,\ \ldots,361,\ \ldots,z^y,\ 841,\ \ldots;$$

si $11 < x < 16$, determine el valor de $(x+z)$.

Problema 8. *Calcular la suma de los dígitos del número que se obtiene al efectuar la operación*

$$\sqrt{\underbrace{4444\ldots4444}_{4046\ \textit{dígitos}} - \underbrace{888\ldots888}_{2023\ \textit{dígitos}}}$$

Problema 9. *En el triángulo $\triangle ABC$, el segmento AC tiene longitud $10+2\sqrt{7}$ y el radio de la circunferencia pequeña es igual a 2. Encuentre la longitud del diámetro AB.*



Problema 10. *Determine los enteros positivos n que satisfacen simultáneamente las tres condiciones siguientes:*

a) *la suma de los dígitos de n es 18,*
b) *$n+3600$ es un cuadrado perfecto y*
c) *$n < 2023$.*

Problema 11. *Una caja contiene* 900 *tarjetas, numeradas del* 100 *al* 999. *Se sacan al azar tarjetas de la caja y se anota la suma de los dígitos de cada tarjeta extraída. ¿Cuál es la menor cantidad de tarjetas que se deben sacar, para garantizar que al menos tres de esas sumas sean iguales?*

Problema 12. *En la siguiente secuencia de figuras, determinar la suma del mayor número de triángulos de la Figura* 2023 *y el mayor número de cuadriláteros de la Figura* 2021.

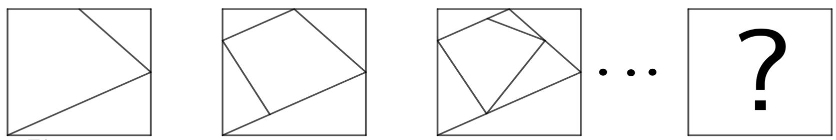


***Figura* 1** ***Figura* 2** ***Figura* 3** ***Figura* 2023**

Soluciones

Solución. (del Problema 1) De la columna de las unidades tenemos $R+O+A+A+A=5$, de la columna de las decenas tenemos $A+R+C+R+R=7$, tomando la diferencia de estas dos igualdades conseguimos $(A+R+C+R+R)-(R+O+A+A+A)=R-A=2$, de donde $R=A+2$. Reemplazando esta igualdad en la columna de las unidades se obtiene $O=3$, $A=0$ y por tanto $R=2$. Sustituyendo estos valores en la columna de las decenas, conseguimos $C=1$. Finalmente, reemplazamos todos estos valores en la columna de las decenas de mil tenemos $O+C+S=8$, así $S=4$ y $B=5$. Por tanto, $A+C+R+O+S+B=15$.

Respuesta. 15 (Opción: B.)

Solución. (del Problema 2) Existen 1009 parejas de números que cumplen la relación, estos son: 3 y 2020; 4 y 2019; 5 y 2018; ...; 1011 y 1012. En última instancia, al extraer 1009 bolos y también aquellos bolos numerados por 2021 y 2022, que no tienen parejas, hacen un total de 1011 bolos extraidos que no cumplirán la igualdad; sin embargo, al extraer el siguiente bolo, cualquiera que sea, cumplirá la igualdad pedida. Así, la menor cantidad de bolos que se deben extraer al azar será de 1012 bolos.

Respuesta. 1012 (Opción: C.)

Solución. (del Problema 3) Asociando algunos términos, la ecuación $x^2-y^2-14y=150$ se puede escribir como $x^2-(y+7)^2=101$, equivalentemente por $(x+y+7)(x-y-7)=101$; ya que 101 es un número primo, la única posibilidad es que $x+y+7=101$ y que $x-y-7=1$, pues $x+y+7$ es mayor que $x-y-7$. Resolviendo estas dos ecuaciones obtenemos $x=51$ e $y=43$. Por tanto, $x-y=8$.

Respuesta. 8 (Opción: B.)

Solución. (del Problema 4) Construyamos el cuadrado $\mathcal{R}$ que contiene la cuarta parte de la circunferencia de centro O, que llamaremos $\mathcal{C}$, y que contiene la circunferencia de centro H y de radio $r>0$, que llamaremos $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{X}$ denota el área de la región de color rojo, tenemos

$$\begin{aligned} \textit{área}(\mathcal{R})-\textit{área}(\mathcal{C})-\textit{área}(\mathcal{T})+\mathcal{X} &= \textit{área}(\mathcal{R})-\textit{área}(\mathcal{D}) \\ (2r)^2-\frac{1}{4}\pi(2r)^2-16+\mathcal{X} &= (2r)^2-\pi r^2, \end{aligned}$$

por lo tanto, $\mathcal{X}=16$.

Respuesta. 16 m^2 (Opción: D.)

Solución. (del Problema 5) Efectuando la multiplicación

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= (n^2+3n)(n^2+3n+2) \\ &= (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 \\ &= ((n^2+3n)+1)^2, \end{aligned}$$

tenemos así la relación $k^2+n=\sqrt{[(n^2+3n)+1]^2}$; por tanto, $k^2+n=n^2+3n+1$, finalmente, $k^2=n^2+2n+1=(n+1)^2$, se concluye que $k=n+1$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } n+1 \text{ (Opción: D.)}}$$

Solución. (del Problema 6) Si x representa el entero positivo inicial, la suma de los diez enteros positivos consecutivos será

$$\sum_{i=0}^{9}(x+i)^2=\sum_{i=0}^{9}x^2+\sum_{i=0}^{9}2xi+\sum_{i=0}^{9}i^9=10x^2+90x+285.$$

La suma de los cubos de los siguientes diez enteros positivos será

$$\sum_{i=10}^{19}(x+i)^3=\sum_{i=10}^{19}x^3+\sum_{i=10}^{19}3x^2i+\sum_{i=10}^{19}3xi^2+\sum_{i=10}^{19}i^3=10x^3+435x^2+6555x+34075,$$

por lo tanto,

$$\sum_{i=0}^{9}(x+i)^2+\sum_{i=10}^{19}(x+i)^3=10x^3+445x^2+6645x+34360.$$

Ahora, si x es par tenemos que x^2 es par, así, $445x^2$ es un múltiplo de 10; en este caso, $6645x$ también es un múltiplo de 10. Por otro lado, si x es impar tenemos que x^2 es impar, es decir, x tiene la forma $2t+1$ y x^2 tiene la forma $2k+1$, para ciertos enteros t y k; se sigue que $445x^2=445(2k+1)=445(2k)+445$ y que $6645x=6645(2t+1)=6645(2t)+6645$, por lo tanto $445x^2+6645x=445(2k)+445+6645(2t)+6645=890k+13290t+7090$ es múltiplo de 10. Finalmente, la expresión $10x^3+445x^2+6645x+34360$, en cualquier caso, es un múltiplo de 10, así, el dígito de las unidades del resultado es 0.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 0 \text{ (Opción: A.)}}$$

Solución. (del Problema 7) La sucesión corresponde a los cuadrados de los números primos

$$2^2,\ 3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ \ldots,x^y,\ \ldots,19^2,\ \ldots,z^y,\ 29^2,\ \ldots;$$

ya que el único primo entre 19 y 29 es 23, entonces $z=23$. Por otro lado, debe suceder que $x=13$, pues $11<x<16$. Por tanto, $x+z=36$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 36}$$

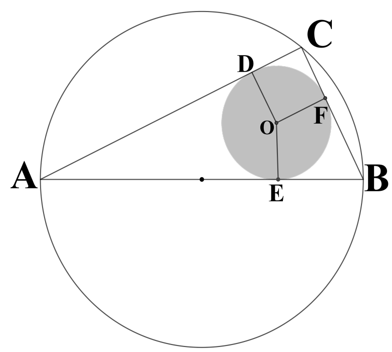
Solución. (del Problema 8) En la siguiente tabla, vemos algunos casos particulares

Casos particulares	Sumas de dígitos
$\sqrt{44-8}=6$	$6=6\times 1$
$\sqrt{4444-88}=66$	$12=6\times 2$
$\sqrt{444444-888}=666$	$18=6\times 3$
$\sqrt{44444444-8888}=6666$	$24=6\times 4$

Notemos que el resultado depende de la cantidad de digitos 8, para la expresión pedida, la suma de dígitos será $6\times 2023=12138$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 12138}$$

Solución. (del Problema 9) Trazamos las alturas del triángulo $\triangle ABC$ (con ángulo recto en $\angle C$ pues AB es un diámetro) pasando por el punto O determinando así los puntos D en AC, E en AB y F en BC, como se ve en la figura siguiente.



Si $x=FB$, tenemos que $x=EB$, por semajanza de triángulos. Por otro lado, ya que el radio de la circunferencia pequeña es 2, tenemos que $DC=2$ pues $\square DCFO$ es un cuadrado, así, $AD=8+2\sqrt{7}$. De nuevo, por semejanza de triángulos, $AE=8+\sqrt{7}$. Por el Teorema de Pitágoras:

$$(10+2\sqrt{7})^2+(2+x)^2=(8+2\sqrt{7}+x)^2$$
$$x^2+4x+40\sqrt{7}+132=x^2+4\sqrt{7}x+16x+32\sqrt{7}+92$$

se sigue que $x=2\sqrt{7}+\frac{2(\sqrt{7}+5)}{\sqrt{7}+3}+8$, así, $x=16$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 16}$$

Solución. (del Problema 10) Escribiendo $x^2=n+3600$, tenemos $0<x^2-3600<2023$, así $\sqrt{3600}<x<\sqrt{5605}$, por lo tanto, $60<x\leq 74$. Por otro lado, ya que la suma de las cifras de n es 18, 3600 y n son múltiplos de 9, luego x es múltiplo de 3. Las posibles valores para x son $63, 66, 69$ y 72, los respectivos valores para n serán $369, 756, 1161$ y 1584; de estos, el único valor que no tiene suma de dígitos igual a 18 es 1161, por tanto, los tres posibles valores para n son $369, 756$ y 1584.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 369, 756 \text{ y } 1584.}$$

Solución. (del Problema 11) Las sumas posibles de los dígitos son todos los números del 1 al 27. Note que 1 y 27 solo pueden salir una vez, al sacar las tarjetas 100 y 999, respectivamente. Los otros números pueden salir al menos tres veces cada uno. El máximo número de tarjetas que se pueden sacar sin que tres sumas sean iguales se obtendría al sacar las tarjetas 100, 999, y dos tarjetas por cada número entre 2 y 26, en total serían $2 + 2 \cdot 25 = 52$ tarjetas. Por tanto, sacando 53 tarjetas garantizamos que al menos tres de las sumas sean iguales.

$\boxed{\text{Respuesta. } 53}$

Solución. (del Problema 12) Analizamos de manera inductiva para contar el número de triángulos y el número de cuadriláteros:

	Figura 1	Figura 2	Figura 3	...	Figura 2021	Figura 2022	Figura 2023
Número de triángulos	2	4	6	...			$4046 = 2 \times 2023$
Número de cuadriláteros	3	5	7	...	$4043 = 2 \times 2021 + 1$		

Se tiene por tanto 4046 triángulos en la Figura 2023 y 4043 cuadrilateros en la Figura 2021, la suma de estos es $4046 + 4043 = 8089$.

$\boxed{\text{Respuesta. } 8089}$

Olimpiada Paceña de Matemática
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: opmatumsa@fcpn.edu.bo
http://opmat.fcpn.edu.bo/