20a Olimpiada Paceña de Matemática

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática
Facultad de Ciencias Puras y Naturales,
Universidad Mayor de San Andrés.

SEGUNDA FASE

Prueba de clasificación

PREGUNTAS Y SOLUCIONES

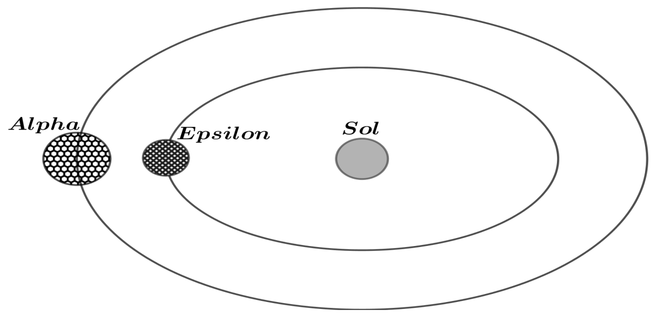
Categoría ϵ "epsilon"

5^{to} y 6^{to} de Primaria

Septiembre del 2023

Preguntas

Problema 1. *Si el planeta Alpha tarda* 3 *años terrestres en dar una vuelta completa alrededor del Sol y el planeta Épsilon tarda* 2 *años en completar dicha vuelta, ambas partiendo de puntos como se indica en la figura, ¿cuántos años deberán transcurrir para que los dos planetas pasen nuevamente por el punto de partida?*



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Problema 2. *En la siguiente operación cada letra representa un dígito entre* 0 *y* 9*. Hallar el valor de la suma* $x + y + y + w + z$.

$$\begin{array}{cccc} x & y & y & w \\ + & z & 5 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

(A) 19 (B) 30 (C) 40 (D) 50 (E) 60

Problema 3. *Se tienen diez piscinas idénticas y dos mangueras con diferentes presiones; sabemos que la primera manguera llena una piscina* 5 *veces más rápido que la segunda manguera. Wilson y Alberto empezaron a llenar* 5 *piscinas cada uno, Wilson con la primera manguera y Alberto con la segunda. Si Wilson terminó de llenar sus* 5 *piscinas* 1 *hora antes, ¿cuánto tiempo le tomó a Alberto llenar sus* 5 *piscinas?*

(A) 1 hora con 15 minutos.
(B) 1 hora con 30 minutos.
(C) 1 hora con 45 minutos.
(D) 1 hora con 50 minutos.
(E) 1 hora con 20 minutos.

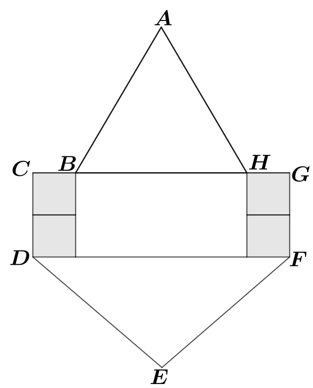
Problema 4. *Nico y Heydi compraron un pastel y se lo comieron de la siguiente manera: una mañana Nico se comió la mitad del pastel, por la noche Heydi se comió la mitad del pastel que quedaba; este proceso siguió de la misma manera durante* 4 *días, comiendo cada uno la mitad del pastel que encontraba. En la mañana del quinto día, Nico se comió lo que quedaba del pastel. ¿Qué porción de pastel comió más Nico que Heydi?*

(A) $\frac{5}{7}$ (B) $\frac{21}{17}$ (C) $\frac{51}{47}$ (D) $\frac{35}{77}$ (E) $\frac{43}{128}$

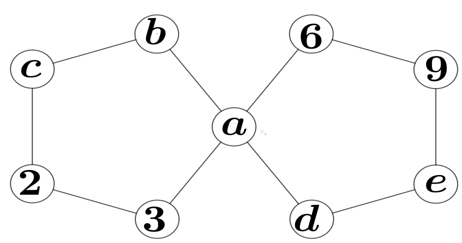
Problema 5. *La altura promedio de tres hermanos es de* 1 *metro con* 74 *centímetros; la altura promedio de dos de estos hermanos, el más alto y el más bajo, es de* 1 *metro con* 75 *centímetros. ¿Cuánto mide el hermano mediano?*

(A) 1 metro con 70 centímetros.
(B) 1 metro con 71 centímetros.
(C) 1 metro con 72 centímetros.
(D) 1 metro con 73 centímetros.
(E) 1 metro con 74 centímetros.

Problema 6. *La siguiente figura está compuesta por el triángulo equilátero* $\triangle ABH$*, el rectángulo* $\square CDFG$*, los cuadrados de color gris y el triángulo isósceles* $\triangle DEF$*, con* $DE = EF$*. Si sabemos que* $AB = DE$*, que el perímetro del triángulo* $\triangle DEF$ *es* 8 *y que el perímetro del rectángulo* $\square CDFG$ *es* 10*, ¿cuál es el perímetro de la figura?*



Problema 7. *En la siguiente figura, los dígitos del* 1 *al* 9 *se han colocado cada uno dentro de un círculo de manera que las dos sumas, de los cinco números en cada pentágono, es la misma. Determinar el valor de* $a + b + c - d - e$*.*



Problema 8. *Cinco cajas contienen cantidades iguales de manzanas. Cuando se sacaron* 60 *manzanas de cada caja, solo quedaron tantas manzanas como habían anteriormente en dos cajas. ¿Cuántas manzanas había en cada caja?*

Problema 9. *Determinar el valor del número después de realizar las multiplicaciones, sumas y restas.*

$$A = -1 \times 5 + 2 \times 6 - 3 \times 7 + 4 \times 8 - ... - 19 \times 23 + 20 \times 24$$

Soluciones

Solución. (del Problema 1) El planeta Alpha tarda 3 años terrestres en dar una vuelta al Sol y el planeta Épsilon tarda 2 años en dar la misma vuelta; Épsilon deberá dar tres vueltas al Sol para que los dos planetas se encuentren nuevamente en su punto de partida, luego, deben transcurrir 6 años para que los planetas coincidan en el punto de partida.

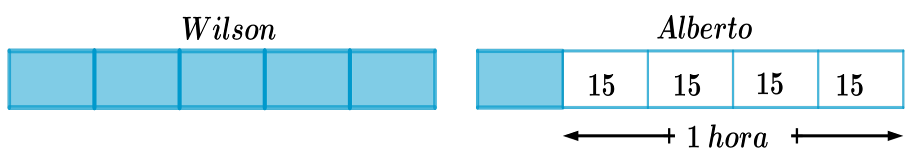
$\boxed{\text{Respuesta. } 6 \text{ (Opción: E.)}}$

Solución. (del Problema 2) El dígito de las unidades del resultado de la suma es 3, para ello, el único valor posible de w es 2. Razonando del mismo modo, y debe ser igual a 7, Z debe ser igual a 2 y x debe ser igual a 1. Por lo tanto,

$$x + y + y + w + z = 1 + 7 + 7 + 2 + 2 = 19.$$

$\boxed{\text{Respuesta. } 19 \text{ (Opción: A.)}}$

Solución. (del Problema 3) La manguera que usa Wilson llena cinco veces más rápido una piscina en comparación a la manguera que usa Alberto, esto significa que, mientras Wilson llenó las cinco piscinas Alberto llenó sólo una piscina, como en el siguiente dibujo



Ya que Wilson terminó de llenar las cinco piscinas 1 hora antes que Alberto, en esa hora Alberto tuvo que llenar las 4 piscinas restantes, lo que significa que Alberto usó 15 minutos en llenar una piscina. Así, a Alberto le tomo 1 hora y 15 minutos llenar sus 5 piscinas.

$\boxed{\text{Respuesta. } 1 \text{ hora con 15 minutos (Opción: A.)}}$

Solución. (del Problema 4) En la siguiente tabla describimos las cantidades que Nico y Heydi comieron de pastel:

Día	Nico comió en la mañana	Heydi comió en la noche
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2^2}$
2	$\frac{\left(\frac{1}{2^2}\right)}{2} = \frac{1}{2^3}$	$\frac{\left(\frac{1}{2^3}\right)}{2} = \frac{1}{2^4}$
3	$\frac{\left(\frac{1}{2^4}\right)}{2} = \frac{1}{2^5}$	$\frac{\left(\frac{1}{2^5}\right)}{2} = \frac{1}{2^6}$
4	$\frac{\left(\frac{1}{2^6}\right)}{2} = \frac{1}{2^7}$	$\frac{\left(\frac{1}{2^7}\right)}{2} = \frac{1}{2^8}$
5	$\frac{1}{2^8}$	0

Por tanto, la porción de pastel que comió Nico más que Heydi fue

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^8}\right)=\frac{2^5+2^3+2+1}{2^7}=\frac{43}{128}.$$

$\boxed{\text{Respuesta. } \frac{43}{128} \text{ (Opción: E.)}}$

Solución. (del Problema 5) La altura promedio de los tres hermanos es de 1 metro con 74 centímetros, así, la suma de las altura de los tres hermanos es de 5 metros con 22 centímetros. La altura promedio de los dos hermanos, el más alto y el más bajo, es de 1 metro con 75 centímetros, así, la suma de sus alturas es de 3 metros con 50 centímetros. Al efectuar la diferencia de estos números obtenemos 1 metro con 72 centímetros que es la altura del hermano mediano.

$\boxed{\text{Respuesta. 1 metro con 72 centimetros (Opción: C.)}}$

Solución. (del Problema 6) Denotemos por x la medida del lado del triángulo equilatero $\triangle ABH$. Como $AB = DE$, los lados iguales del triángulo isósceles $\triangle DEF$ también miden x. Como $CD = GF$, $CD = 2CB$ y $GF = 2GH$, tenemos $CB = GH$; denotaremos por $z = CB = GH$.

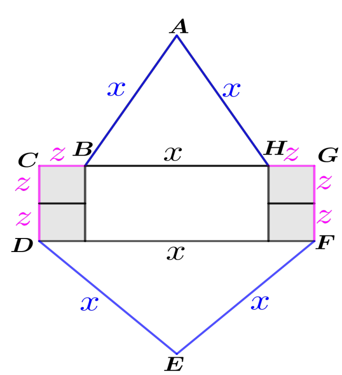
El perímetro del triángulo $\triangle DEF$ es 8, así,

$$x + x + z + x + z = 8.$$

El perímetro del rectángulo $\square CDFG$ es 10, así,

$$z+z+z+z+x+z+z+z+z+x = 10;$$

o bien, $z+z+z+z+x = 5$. El perímetro de la figura se puede calcular del siguiente modo:



$$x+z+z+z+x+x+z+z+z+x = (x+x+z+x+z)+(z+z+z+z+x) = 8+5 = 13.$$

$\boxed{\text{Respuesta. 13}}$

Solución. (del Problema 7) Por las condiciones del problema $2+3+b+c+a=a+6+9+d+e$, o bien $b+c=d+e+10$; esta última igualdad debe ser válida usando los dígitos $1,4,5,7$ y 8 que aún no se usaron en los pentágonos. Para esto, debe suceder que $b+c=15$ y así $d+e=5$, por lo tanto, $a=5$. Finalmente $a+b+c-d-e=a+(b+c)-(d+e)=5+15-(5)=15$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 15}$$

Solución. (del Problema 8) Se sacaron un total de $60\times 5=300$ manzanas, y esto es igual al número de manzanas que habían en total en tres cajas; esto significa que habían 100 manzanas en cada caja.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 100}$$

Solución. (del Problema 9) Notemos que A tiene 20 términos. Podemos asociar cada dos terminos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A &= -1\times 5+2\times 6-3\times 7+4\times 8-5\times 9+6\times 10-\ldots-19\times 23+20\times 24 \\ &= \underbrace{(-1\times 5+2\times 6)}_{7}+\underbrace{(-3\times 7+4\times 8)}_{11}+\underbrace{(-5\times 6+6\times 10)}_{15}-\ldots+\underbrace{(-19\times 23+20\times 24)}_{43} \\ &= \underbrace{7+11+15+\ldots+43}_{10\text{ términos}}. \end{aligned}$$

Del término 7 al 11 hay una diferencia de 4, del término 11 al 15, también hay una diferencia de 4 y así sucesivamente hasta el último término. Completando los diez términos tenemos

$$\begin{aligned} A &= 7+11+15+19+23+27+31+35+39+43 \\ &= (7+43)+(11+39)+(15+35)+(19+31)+(23+27) \\ &= 50+50+50+50+50 \\ &= 250. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Respuesta. } 250}$$

Olimpiada Paceña de Matemática
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: `opmatumsa@fcpn.edu.bo`
`http://opmat.fcpn.edu.bo/`