20va Olimpiada Paceña de Matemática

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática
Facultad de Ciencias Puras y Naturales,
Universidad Mayor de San Andrés.

PRIMERA FASE

Prueba de clasificación

PREGUNTAS Y SOLUCIONES

Categoría γ “gamma”

5^{to} y 6^{to} de Secundaria

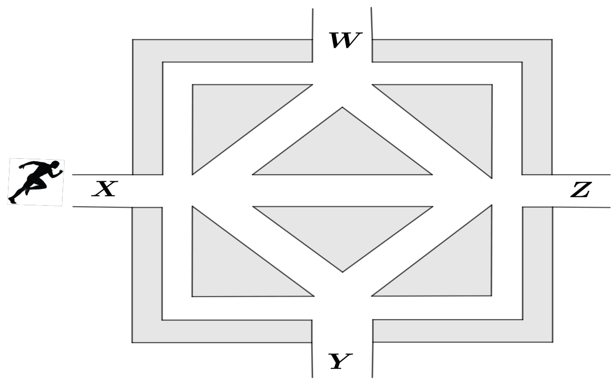
Agosto de 2023

Problemas

Problema 1. *Encuentre dos números consecutivos cuya suma sea igual a la cuarta parte del menor más $\frac{5}{3}$ del mayor. Dar como respuesta el producto de los dos números.*

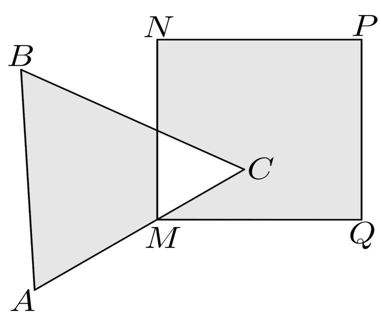
(A) 42 (B) 56 (C) 72 (D) 90 (E) 156

Problema 2. *Una persona debe de recorrer tadas las calles de la siguiente figura, sin pasar dos veces por una misma calle. Si entra por la puerta X ¿por cuál puerta saldrá?*



(A) W (B) Z (C) Y (D) W o Y (E) X

Problema 3. *Determinar el perímetro de la región sombreada, si se sabe que $MNPQ$ es un cuadrado de lado 5 m y que ABC es un triángulo equilátero de lado 5 m.*



(A) 19 m (B) 16 m (C) 35 m (D) 45 m (E) 21 m

Problema 4. *Sean* $7, 14, 21, \ldots, 2016, 2023$ *términos de una sucesión aritmética. Calcular*

$$\frac{1}{7 \times 14} + \frac{1}{14 \times 21} + \cdots + \frac{1}{2016 \times 2023}$$

(A) $\frac{289}{7\times 2023}$ (B) $\frac{288}{7\times 2023}$ (C) $\frac{288}{2023}$ (D) $\frac{289}{7}$ (E) 1

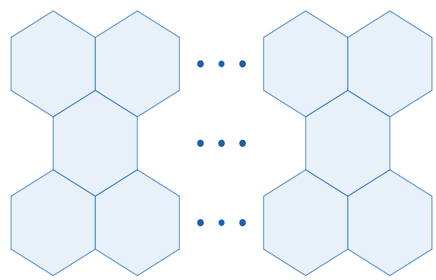
Problema 5. *La secuencia de números* $121, 1221, 12221, \ldots$ *contiene todos los números de la forma*

$$1\underbrace{222\ldots222}_{n}1,$$

con n *dígitos* 2*. La cantidad de dígitos* 2 *indica la posición del número en la secuencia. Por ejemplo, el número* 122222221 *es el séptimo término. ¿Entre los* 2023 *primeros términos de la secuencia, cuántos son divisibles por* 3*?*

(A) 2024 (B) 1221 (C) 2000 (D) 675 (E) 674

Problema 6. *El arreglo de la figura, compuesto de* 35 *hexágonos regulares, fue armado con mondadientes. ¿Cuántos mondadientes son necesarios para armar el arreglo de modo que cada lado de un hexágono sea un mondadiente?*

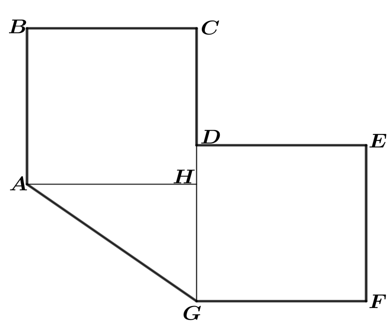


(A) 192 (B) 160 (C) 128 (D) 134 (E) 200

Problema 7. *En la premiación de la OPMat, existen* 10 *libros diferentes de Álgebra,* 7 *libros diferentes de Combinatoria y* 5 *libros diferentes de Geometría para premiar a los ganadores. Lorena es la primera en recoger el premio que consta de* 2 *libros, con la condición de que estos no pueden ser de la misma materia. Indique cuántas opciones puede tomar Lorena para recoger su premio.*

(A) 155 (B) 154 (C) 156 (D) 160 (E) 170

Problema 8. *En la siguiente figura, hay dos cuadrados del mismo tamaño* $ABCH$ *y* $GDEF$ *con* $BC = 8$ *cm y* $GC = 14$ *cm. Hallar el perímetro de* $ABCDEFGA$*.*



(A) 56 cm (B) 48 cm (C) 65 cm (D) 64 cm (E) 60 cm

Problema 9. *Una vez calculado el valor de*

$$(\underbrace{333\ldots334}_{\text{2023 cifras}})^2,$$

determine la suma de sus dígitos.

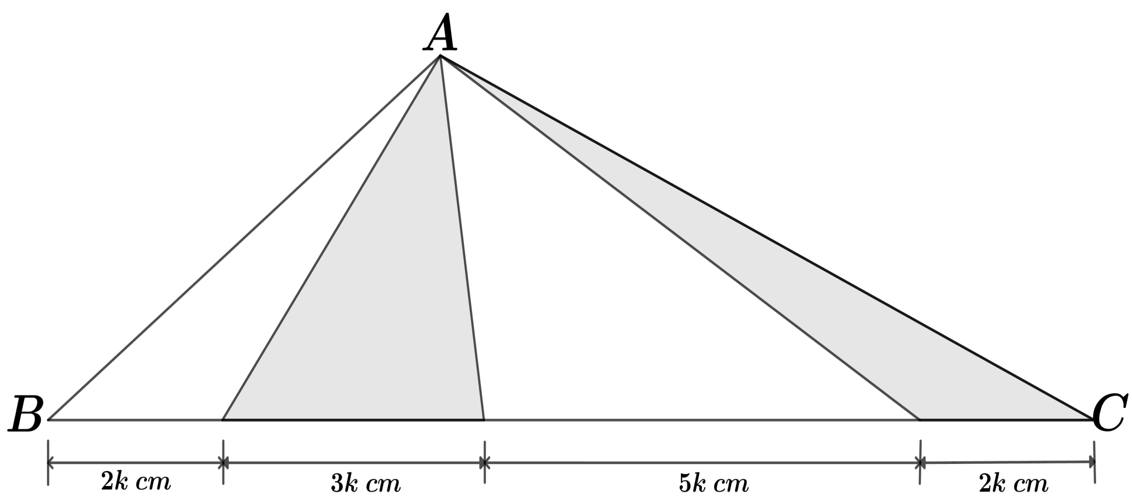
(A) 15150 (B) 10505 (C) 12340 (D) 12139 (E) 12541

Problema 10. *Factorizar la siguiente expresión:*

$$x^3y + x^2y^2 - x^2yz + yz^3 - xyz^2 + xz^3 - y^2z^2 - x^3z$$

(A) $(x-z)(z-y)(x+y)(x+z)$. **(C)** $(x+z)(x+y)(y-x)(z-y)$. **(E)** $(x+y)(x+z)(y+z)z$.
(B) $(x-z)(x+z)(x+y)(y-z)$. **(D)** $(z-x)(y-z)(x-y)(x+z)$.

Problema 11. *Determinar el área de la región sombreada, si el área de la región triángular* ABC *es* $48\ cm^2$.



(A) 25 cm^2 (B) 20 cm^2 (C) 24 cm^2 (D) 29 cm^2 (E) 50 cm^2

Problema 12. *¿De cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra BOLIVAR?*

B
O O
L L L
I I I I
V V V
A A
R

(A) 16 (B) 24 (C) 14 (D) 20 (E) 30

Problema 13. *¿De cuántas maneras podemos escoger dos enteros del* 1 *a* 2023 *tal que la suma sea impar? Como aclaración, si se escoge el par* (a, b) *tal que* $a + b$ *es impar, entonces se supone que ya se cuenta el par* (b, a).

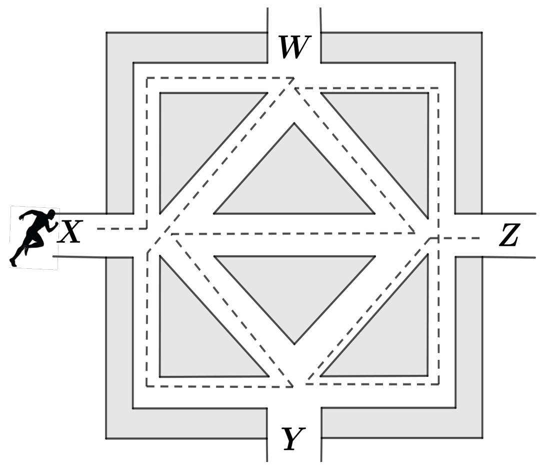
(A) 1011 (B) 1012 (C) 20202023 (D) 62024 (E) 1023132

Soluciones

Solución. (Del problema 1) Denotemos por x y $x+1$ los dos números consecutivos. Las condiciones del enunciado se traducen en la ecuación lineal $x+(x+1)=\frac{1}{4}x+\frac{5}{3}(x+1)$ cuya solución es $x=8$. Los números consecutivos buscados son 8 y 9, y su producto vale $8\times 9=72$.

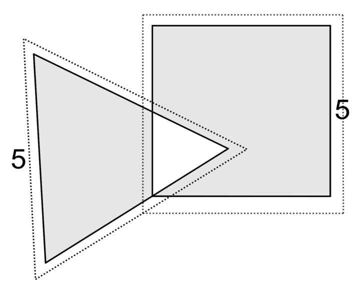
Respuesta. 72 (Opción: C.)

Solución. (Del problema 2) Partiendo de X tenemos cinco posibles caminos a tomar. Si se recorren todos los caminos una sola vez, partiendo de X, debemos terminar fuera de X ya que 5 es impar. Como las puertas W y Y tienen 4 caminos que los conectan, al pasar por ellas, necesariamente se termina fuera de ellas. Finalmente, existen 5 caminos que conectan Z, como comenzamos fuera de está, al final debemos terminar en Z.



Respuesta. Z (Opción: B.)

Solución. (Del problema 3) Marcamos con puntos suspensivos el perímetro de la región sombreada; notemos que esto equivale a remarcar el perímetro del triángulo ABC y el perímetro del cuadrado $MNPQ$.



De este modo, el perímetro buscado es $3\times(5\text{ m})+4\times(5\text{ m})=35$ m.

Respuesta. 35 m (Opción: C.)

Solución. (Del problema 4) La siguiente igualdad $\frac{1}{n\times(n+7)} = \frac{1}{7\times n} - \frac{1}{7\times(n+7)}$ es verdadera. Así,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{7\times 14} &= \frac{1}{7\times 7} - \frac{1}{7\times 14}\\
\frac{1}{14\times 21} &= \frac{1}{7\times 14} - \frac{1}{7\times 21}\\
\vdots \quad &= \quad \vdots \quad - \quad \vdots\\
\frac{1}{2016\times 2023} &= \frac{1}{7\times 2016} - \frac{1}{7\times 2023}.
\end{aligned}$$

Sumando término a término las igualdades anteriores conseguimos:

$$\frac{1}{7\times 14} + \frac{1}{14\times 21} + \cdots + \frac{1}{2016\times 2023} = \frac{1}{7\times 7} - \frac{1}{7\times 2023},$$

por lo tanto, $\frac{1}{7\times 7} - \frac{1}{7\times 2023} = \frac{288}{7\times 2023}$.

Respuesta. $\frac{288}{7\times 2023}$ (Opción: B.)

Solución. (Del problema 5) Un número es divisible por 3 si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3. Así, el primer término de la secuencia que es un múltiplo de 3 es el 1221 pues $1+2+2+1=6$, que es múltiplo de 3. El segundo número es 1222221, y el tercero es 1222222221. Observamos que estos son los términos segundo, quinto, octavo, etc., de la secuencia, es decir, tenemos un múltiplo de 3 cada 3 términos en la secuencia. Contamos cuántos de ellos hay en los primeros 2023 términos: $2, 5, 8, 11, \ldots$, todos son múltiplos de 3 más 2, el último antes del 2023 con dicha propiedad es el 2021, tenemos así una progresión aritmética: $a_1 = 2$, $a_n = 2021$, $d = 3$, luego $2021 = a_n = a_1 + (n-1)\times d = 2 + (n-1)\times 3$, de donde $n = 674$. Por lo tanto, dentro de los primeros 2023 términos hay 674 múltiplos de 3.

Respuesta. 674 (Opción: E.)

Solución. (Del problema 6) De la figura podemos observar que los hexágonos están dispuestos en tres filas horizontales y que la fila del medio posee un hexágono menos que las otras dos filas. Entonces, tenemos 12 hexágonos en la primera y en la tercera fila, y 11 hexágonos en la segunda. Para construir el primer hexágono de la primera fila, necesitaremos seis mondadientes; para los otros 11 hexágonos en la primera fila, se necesitarán cinco mondadientes, así, necesitamos $6+(5\times 11) = 61$ mondadientes para armar la primera fila. Para construir el primer hexágono de la segunda fila, necesitaremos cuatro mondadientes, todos los demás hexágonos en la segunda fila requieren sólo tres mondadientes, así, con $4+(3\times 10) = 34$ mondadientes, podemos construir la segunda fila. De modo análogo, para armar el primer hexágono de la tercera fila, necesitaremos cinco mondadientes, para los otros 10 hexágonos solo necesitamos tres mondadientes, por tanot, son necesarios $5+(3\times 10)+4 = 39$ mondadientes para construir la tercera fila. En total son necesarios $61+34+39 = 134$ mondadientes para construir el arreglo.

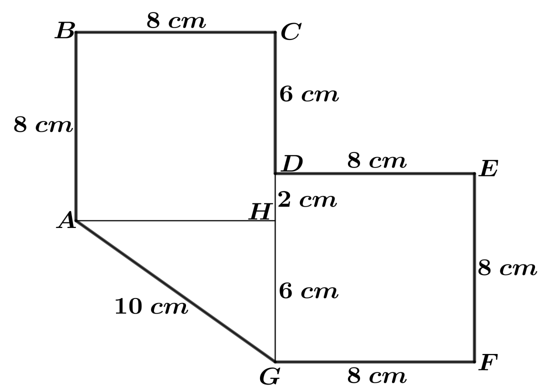
$$\boxed{\text{Respuesta. } 134 \text{ (Opción: D.)}}$$

Solución. (Del problema 7) Lorena puede escoger un par de libros de las siguientes tres formas: Álgebra y Combinatoria, Álgebra y Geometría, y Combinatoria y Geometría. En el primer caso, para escoger un libro de Álgebra tiene 10 alternativas y para escoger un libro de Combinatoria tiene 7 alternativas, entonces por el principio del producto, existen $10 \times 7 = 70$ maneras de elegir un par de libros de Álgebra y Combinatoria. Con el mismo razonamiento, para escoger un par de libros de Álgebra y Geometría, tenemos $10 \times 5 = 50$ posibilidades de elección; para la tercera pareja tenemos $7 \times 5 = 35$ posibles elecciones. Así, Lorena tiene $70 + 50 + 35 = 155$ maneras de tomar dos libros.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 155 \text{ (Opción: A.)}}$$

Solución. (Del problema 8) Si denotamos por $x = DH$, ya que $14 = GC = GH + HC = (8 - x) + 8$, se tiene $x = 2$, así $HG = 6$ cm y $CD = 6$ cm. Haciendo uso del teorema de Pitagoras en el triángulo AHG tenemos $AG = 10$ cm. Por tanto, el perímetro de $ABCDEFGA$ es

$$8 + 8 + 6 + 8 + 8 + 8 + 10 = 56 \text{ cm}$$



$$\boxed{\text{Respuesta. } 56 \text{ cm (Opción: A.)}}$$

Solución. (Del problema 9) Al elevar al cuadrado números pequeños de la forma $34, 334, 3334, ...$ encontramos un patrón, eso será útil para determinar el resultado . Esto se puede desarrollar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccc}
(34)^2 & = & 1156 & \Rightarrow & 1+1+5+6=13 & = & 6\cdot(2)+1 \\
(334)^2 & = & 111556 & \Rightarrow & 1+1+1+5+5+6=19 & = & 6\cdot(3)+1 \\
(3334)^2 & = & 11115556 & \Rightarrow & 1+1+1+1+5+5+5+6=25 & = & 6\cdot(4)+1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(\underbrace{3333\ldots34}_{\text{2023 cifras}})^2 & & & \Rightarrow & & = & 6\cdot(2023)+1
\end{array}$$

Por tanto, la suma de sus dígitos es $6 \times (2023) + 1 = 12139$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 12139 \text{ (Opción: D.)}}$$

Solución. (Del problema 10) Asociando los términos de

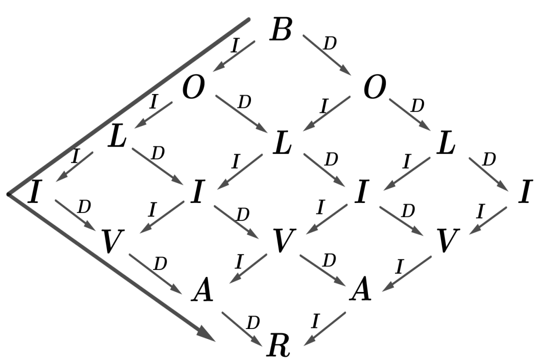
$$
\begin{aligned}
x^3y + x^2y^2 - x^2yz + yz^3 - xyz^2 + xz^3 - y^2z^2 - x^3z =& (x^3y - x^3z) + (x^2y^2 - x^2yz) + (z^3x - xyz^2) + (z^3y - z^2y^2) \\
=& x^3(y-z) + x^2y(y-z) - z^2x(y-z) - yz^2(y-z) \\
=& (x^3 + x^2y - z^2x - yz^2) \\
=& [(x^2(x+y) - z^2(x+y)](y-z) \\
=& (x^2 - z^2)(x+y)(y-z) \\
=& (x-z)(x+z)(x+y)(y-z)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Respuesta. } (x-z)(x+z)(x+y)(y-z) \text{ (Opción: B.)}}$

Solución. (Del problema 11) Hay cuatro regiones triangulares dentro del triángulo ABC y todas estas regiones tienen la misma altura h. Asi las áreas de estas cuatro regiones triangulares están dadas por $\frac{h\cdot 2k}{2} = hk$, $\frac{h\cdot 3k}{2} = \frac{3}{2}hk$, $\frac{h\cdot 5k}{2} = \frac{5}{2}hk$, $\frac{h\cdot 2k}{2} = hk$. Sabemos que el área del triángulo ABC es $48 = hk + \frac{3}{2}hk + \frac{5}{2}hk + hk = hk(1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + 1)$ de donde obtenemos $hk = 8$ cm^2. El área de la región sombreada (dos triángulos) es $\frac{3}{2}hk + hk = (\frac{3}{2}+1)hk = (\frac{3}{2}+1)8$ cm$^2 = 20$ cm^2.

$\boxed{\text{Respuesta. } 20 \text{ cm}^2 \text{ (Opción: B.)}}$

Solución. (Del problema 12) De la letra B se puede llegar de dos maneras a la letra O por izquierda (I) o por la derecha (D), de esta forma identificamos con flechas que indican su dirección. Una de las maneras de leer la palabra $BOLIVAR$ es $IIIDDD$, como se muestra en la figura. Asi las demás maneras son: $DDDIII$, $IIDIDD$, $DDIDII$, $IIDDID$, $DDIIDI$, $IIDDDI$, $DDIIID$, $IDIIDD$, $DIDDII$, $IDIDID$, $DIDIDI$, $IDIDDI$, $DIDIID$, $IDDIID$, $DIIDDI$, $IDDIDI$, $DIIDID$, $IDDDII$, $DIIIDD$. Por tanto, tenemos 20 maneras diferentes de leer la palabra BOLIVAR.



$\boxed{\text{Respuesta. } 20 \text{ (Opción: D.)}}$

Solución. (Del problema 13) Observemos que:

- la suma de dos enteros pares es un número entero par;
- la suma de dos enteros impares es un número entero par;
- la suma de un entero par con cualquier entero impar es un número impar.

Considerando los conjuntos

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, \ldots, 2022\}$$
$$I = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, \ldots, 2023\}$$

tenemos $|P \times I| = |P| \times |I| = 1011 \times 1012 = 1023132$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 1023132 \text{ (Opción: E.)}}$$

Olimpiada Paceña de Matemática
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: opmatumsa@fcpn.edu.bo
http://opmat.fcpn.edu.bo/