20a Olimpiada Paceña de Matemática

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática
Facultad de Ciencias Puras y Naturales,
Universidad Mayor de San Andrés.

SEGUNDA FASE

Prueba de clasificación

PREGUNTAS Y SOLUCIONES

Categoría γ "gamma"

5^{to} y 6^{to} de Secundaria

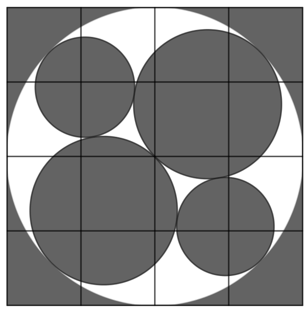
Septiembre del 2023

Preguntas

Problema 1. *Un novelista escribió dos libros. Si sumamos el número de páginas de los dos libros obtenemos* 356 *páginas. Las dimensiones del primer libro son de* 20×15 *cm y las del segundo libro son* 17×15 *cm. Al extender todas las hojas de los dos libros, se cubre una superficie total de* $4{,}9080\ m^2$. *¿Cuántas páginas tiene cada libro?*

(A) $154; 172$ (B) $124; 182$ (C) $164; 192$ (D) $214; 192$ (E) $214; 202$

Problema 2. *Sabiendo que la medida de los lados de todos los cuadrados pequeños de la figura es de* 3 *cm, hallar el área de la región sombreada.*



(A) $72 - 8\pi$ (B) $144 - 2\pi$ (C) π (D) $144 - 10\pi$ (E) $72 - \pi$

Problema 3. *Determinar la suma de todos los posibles valores enteros de* n *que resuelven la ecuación*

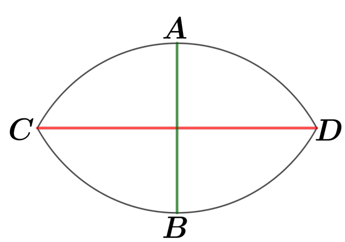
$$125 + 25^n = 6 \times 5^{n+1}.$$

(A) 5 (B) 3 (C) 1 (D) 2 (E) 4

Problema 4. *Encuentre el número de triángulos rectángulos que cumplen la siguiente condición: la medida de un cateto y de la hipotenusa son números enteros y el otro cateto mide* $\sqrt{2023}$.

(A) 2 (B) 3 (C) 7 (D) 8 (E) 9

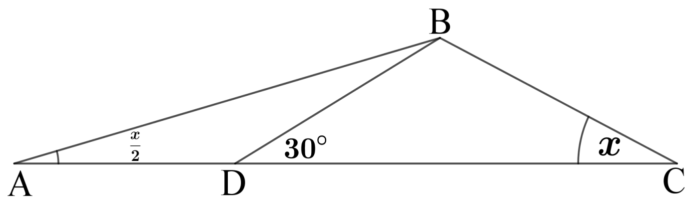
Problema 5. *Dos circunferencias, uno con centro en* A *y el otro con centro en* B, *se intersectan en los puntos* C *y* D *como se muestra en la siguiente figura:*



Determinar el valor de la expresión $\frac{CD}{AB}$.

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2 (E) 3

Problema 6. *Sabiendo que $AB = DC$, encuentre el valor del ángulo x.*



(A) 20° (B) 30° (C) 40° (D) 50° (E) 60°

Problema 7. *Si a, b y c son números enteros que satisfacen el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} ab + c = 2022, \\ a + bc = 2023. \end{cases}$$

Hallar el valor de la expresión $a + b + c$.

Problema 8. *Una pelota se suelta desde una altura de 19 m. Si en cada rebote la pelota alcanza una altura igual a los $\frac{2}{3}$ de su altura anterior, calcular el recorrido vertical total de la pelota hasta detenerse.*

Problema 9. *Determine el valor de la expresión*

$$\frac{1 \times 2^2 + 1 \times 2 \times 3^2 + 1 \times 2 \times 3 \times 4^2 + \ldots + 1 \times 2 \times \ldots \times 2021 \times 2022^2}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times 2023 - 2}$$

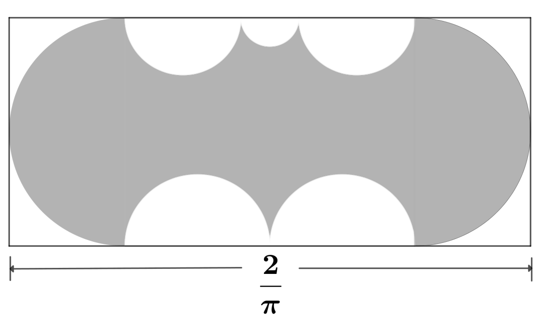
Problema 10. *Se escriben en sucesión todos los números del 1 al 2023, en orden, uno a continuación del otro, formando el número*

$$H = 12345678910111213 14 \ldots 20222023.$$

Si g es la cifra central del número H, determine la suma de g con el número de la sucesión a la que pertenece g.

Problema 11. *Encuentre todos los números primos que son al mismo tiempo suma y diferencia de otros dos primos.*

Problema 12. *En la figura hay 7 semicircunferencias: 5 son de color blanco, 2 de color gris tangentes a los lados del rectángulo. Determinar el perímetro de la región sombreada.*



Problema 13. *En una caja se tienen* 70 *esferas:* 30 *rojas,* 24 *azules,* 11 *verdes y* 5 *marrones. Determine cuántas esferas como mínimo se deben extraer para estar seguros de obtener:*

- *al menos* 6 *esferas azules y* 3 *verdes.*
- *al menos* 8 *esferas del mismo color.*

¿Cuál es la suma de ambas cantidades?

Soluciones

Solución. (del Problema 1) Asumiendo que el número de hojas del libro de dimensión 20×15 es x y el número de hojas del libro de dimensión 17×15 es w, ya que el total de páginas de ambos libros es 356, entonces hay en total $\frac{356}{2} = 178$ hojas, esto significa que

$$x + y = 178 \tag{1}$$

Si extendemos todas estas hojas se tiene una superficie de 4,9080 $m^2 = 49080$ cm^2. Esto equivale a la ecuación

$$(20 \times 15)x + (17 \times 15)y = 49080. \tag{2}$$

De la ecuación (1) despejamos la variable y y luego reemplazamos a la ecuación (2), de donde se obtiene $300x + 255(178 - x) = 49080$. Resolviendo la anterior ecuación tenemos $x = 82$ hojas, este resultado sustituimos en la ecuación (1), así $y = 96$. Por tanto, el libro que tiene dimensión 20×15 tiene $2 \times 82 = 164$ páginas y el otro tiene $2 \times 96 = 192$ páginas.

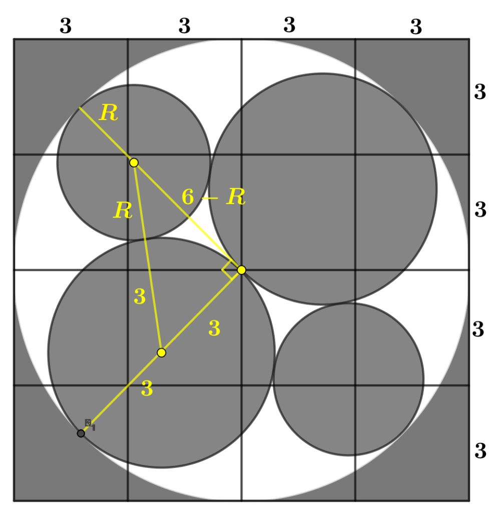
$\boxed{\text{Respuesta. } 164 \text{ } y \text{ } 192 \text{ (Opción: C.)}}$

Solución. (del Problema 2) Notemos que hay cuatro circunferencias tangentes de color gris; dos grandes de radio 3 y dos pequeñas de radio R. Trazamos tres segmentos, dos de ellos son radios de la circunferencia de radio 6 que además forman parte de las diagonales del cuadrado, el otro segmento es la unión de los puntos medios de las circunferencias de radio R y radio 3, esto determina un triángulo rectángulo, como se ve en la figura.

Para determinar el valor de R usemos el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}(R + 3)^2 &= (6 - R)^2 + 3^2\\ R^2 + 6R + 9 &= 36 - 12R + R^2 + 9\\ R &= 2\end{aligned}$$

Denotemos por $\mathcal{X}$ el área del cuadrado de dimensión 12×12, así $\mathcal{X} = 144$, $\mathcal{Z}$ el área de la circunferencia de radio 6, entonces $\mathcal{Z} = \pi \cdot (6)^2$. El área de la región sombreada que buscamos será: $(\mathcal{X} - \mathcal{Z}) + 2 \cdot (\pi \cdot R^2) + 2 \cdot (\pi \cdot 3^2)$.



Luego $(\mathcal{X} - \mathcal{Z}) + 2 \cdot (\pi \cdot R^2) + 2 \cdot (\pi \cdot 3^2) = (144 - 36\pi) + 8\pi + 18\pi = 144 - 10\pi$.

$\boxed{\text{Respuesta. } 144 - 10\pi \text{ (Opción: D.)}}$

Solución. (del Problema 3) Usando propiedades de exponentes: $125 + 25^n = 6 \cdot 5^{n+1}$, esto es equivalente a $125 + 25^n = 5^{n+1} + 5 \cdot 5^{n+1}$. Luego transponiendo y conmutando términos tenemos $5^n \cdot 5^n - 5^{n+1} - 5^{n+2} + 5^3 = 0$ que al factorizar da $(5^n - 25)(5^n - 5) = 0$. De aqui $5^n - 25 = 0$ o $5^n - 5 = 0$, de donde las soluciones son $n = 2$, $n = 1$. Por tanto, la suma de todas las soluciones es $2 + 1 = 3$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 3 \text{ (Opción: B.)}}$$

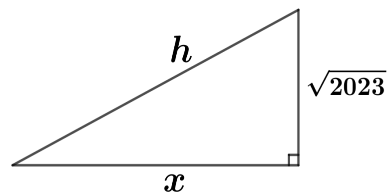
Solución. (del Problema 4) Supongamos que x es la longitud de uno de los catetos del triángulo y h la hipotenusa, Por teorema de Pitágoras:

$$x^2 + 2023 = h^2,$$

lo que es equivalente a

$$7 \times 17 \times 17 = (h - x)(h + x)$$

pues $2023 = 7 \times 17 \times 17$.



Como x y h son enteros positivos se tiene las siguientes posibilidades:

- Si $(h - x) = 7$ y $(h + x) = 17 \times 17$, resolviendo tenemos $h = 148$ y $x = 141$.
- Si $(h - x) = 17$ y $(h + x) = 7 \times 17$, resolviendo tenemos $h = 68$ y $x = 51$.
- Si $(h - x) = 1$ y $(h + x) = 17 \times 17 \times 17 \times 7$, resolviendo tenemos $h = 1012$ y $x = 1011$.

En los casos donde $(h - x) = 17 \times 17$ y $(h + x) = 7 \times 17$, $(h - x) = 7 \times 17$ y $(h + x) = 17 \times 17$ y $(h - x) = 17 \times 17 \times 7$ y $(h + x) = 1$ no tienen soluciones enteras positivas. Luego existen sólo 3 triángulos rectángulos.

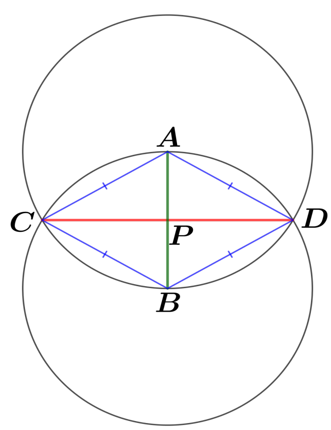
$$\boxed{\text{Respuesta. } 3 \text{ (Opción: B.)}}$$

Solución. (del Problema 5) Sea P el punto de intersección de los segmentos AB y CD. Completando las dos circunferencias (ver grafico) podemos observar que $AB = AC = CB = BD = DA$ formando así un rombo.

Las diagonales de un rombo se bisecan, es decir, $PC = PD$, $PA = PB$. Por el teorema de potencia de un punto tenemos:

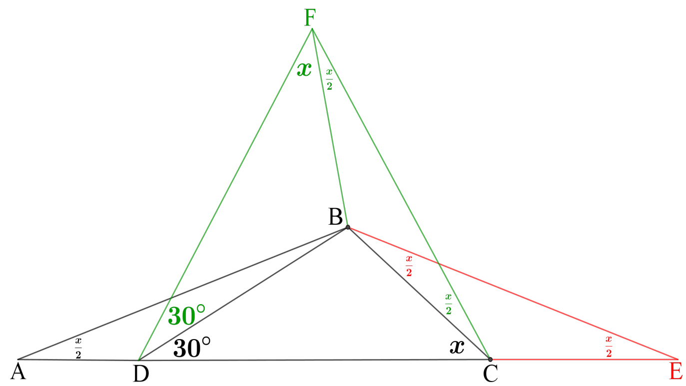
$$\frac{CD}{2} \cdot \frac{CD}{2} = \left(AB + \frac{AB}{2}\right)\left(AB - \frac{AB}{2}\right)$$

de la anterior igualdad tenemos $\frac{(CD)^2}{(AB)^2} = 3$. Por tanto, $\frac{CD}{AB} = \sqrt{3}$.



$$\boxed{\text{Respuesta. } \sqrt{3} \text{ (Opción: C.)}}$$

Solución. (del Problema 6) Construyamos un segmento $AB = BE$ donde E es el punto de intersección de la recta que pasa por B, y la prolongación de la recta AC. El triángulo ABE es isósceles, de aqui $\angle AEB = \frac{x}{2}$. Por el teorema del ángulo exterior se obtiene $\angle CBE = \frac{x}{2}$. Así, el triángulo CBE es isósceles, de donde obtenemos $BC = EC$. Ahora construimos un triángulo equilátero DFC, por tanto tenemos que los triángulos DFB y DCB son congruentes, por el criterio LAL, y de aquí $FB = CB$. También por el criterio LLL, los triángulos FBC y BCE son congruentes, y esto es $\angle BFC = \frac{x}{2}$. Por tanto $x + \frac{x}{2} = 60$, entonces $x = 40°$.



$$\boxed{\text{Respuesta. } 40° \text{ (Opción: C.)}}$$

Solución. (del Problema 7) De las dos igualdades obtenemos $(a+bc)-(ab+c)=1$, realizando operaciones obtenemos $(b-1)(c-a) = 1$, como a, b y c son números enteros tenemos dos posibilidades, para esta igualdad. La primera posibilidad es que $(b-1) = 1$ y $(c-a) = 1$ de aquí obtenemos $b = 2$, entonces $c = \frac{1012\cdot 2}{3}$ que no pertenece a los enteros, por lo cual no es solución. La segunda posibilidad es $(b-1) = -1$ y $(c-a) = -1$ de aquí obtenemos $b = 0$, $c = 2022$, $a = 2023$. Luego $a + b + c = 4045$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 4045}$$

Solución. (del Problema 8) El primer recorrido de la pelota es de 19 metros, en el primer rebote la pelota se eleva $\frac{2}{3}(19)$ y desciende la misma distancia, en el segundo rebote la pelota se eleva $\frac{2^2}{3^2}(19)$ y desciende la misma distancia y así sucesivamente. La distancia total recorrida será

$$\begin{aligned} S =& 19 + (2)\frac{2}{3}(19) + (2)\frac{2^2}{3^2}(19) + (2)\frac{2^3}{3^3}(19) + \cdots \\ =& -19 + 2(19)\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \cdots\right) \\ =& -19 + 38\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) \end{aligned}$$

sumando la última expresión tenemos $S = 95$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 95}$$

Solución. (del Problema 9) Utilizando el método inductivo para los casos parecidos al problema:

Primer término del númerador $\dfrac{1 \times 2^2}{1 \times 2 \times 3 - 2} = \dfrac{4}{4} = 1$

Sumando 2 términos del númerador $\dfrac{1 \times 2^2 + 1 \times 2 \times 3^2}{1 \times 2 \times 3 \times 4 - 2} = \dfrac{22}{22} = 1$

Sumando 3 términos del númerador $\dfrac{1 \times 2^2 + 1 \times 2 \times 3^2 + 1 \times 2 \times 3 \times 4^2}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 - 2} = \dfrac{118}{118} = 1$

Luego el valor de la expresión es

$$\frac{1 \times 2^2 + 1 \times 2 \times 3^2 + 1 \times 2 \times 3 \times 4^2 + \ldots + 1 \times 2 \times \ldots \times 2021 \times 2022^2}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times 2023 - 2} = 1$$

Respuesta. 1

Solución. (del Problema 10) El número total de cifras H es $(2023+1) \times 4 - 1111 = 6985$ o puede contar de la siguiente manera: $6 + 2 \times (99-9) + 3 \times (999-99) + 4 \times (2023-999) = 9 + 180 + 2700 + 4096 = 6985$. Entonces la cifra central está en el lugar 3493. Para llegar a esa cifra necesitamos todos los números del 1 al 999 que son $9 + 180 + 2700 = 2889$ y otras $(3493 - 2889 = 604)$ 604 cifras más. A partir de 1000, todos los números que se escriben tienen 4 cifras y necesitamos $\frac{604}{4} = 151$ números de cuatro cifras, despues de 999, hasta el número 1150, la última cifra (el 0) es el número central y esta cifra 0 corresponde al número 1150. Por tanto, la suma es $0 + 1150 = 1150$.

Respuesta. 1150

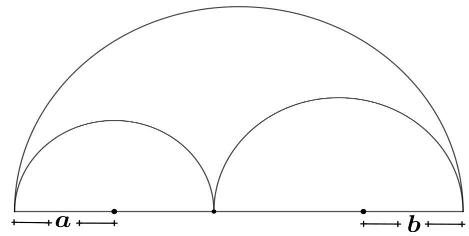
Solución. (del Problema 11) Sean p, p_1, p_2, p_3 y p_4 números primos que cumplen $p = p_1 + p_2 = p_3 - p_4$. Notemos que el valor más pequeño de la suma de dos primos es $4 = 2 + 2$, de aquí $p > 4$ y también p debe ser un número impar, entonces p_1 y p_2 tienen paridad diferente, p_3 y p_4 también tienen paridad diferente. Como el número 2 es el único número primo par, entonces $p_1 = p_4 = 2$ y de aquí $p = 2 + p_2 = p_3 - 2$, esto implica que $p_2 = p - 2$ y $p_3 = p + 2$. Luego $p-2, p, p+2$ son números primos impares consecutivos. Ahora vamos a investigar el número de estos primos consecutivos. Sean $q, q+2, q+4$ tres primos impares consecutivos con diferencia 2. Supongamos que q es un primo impar mayor que 3, entonces $q = 3n \pm 1$ para algún entero positivo n. Sin embargo, cuando $q = 3n \pm 1$, $q + 2 = 3n \pm 3 = 3(n \pm 1)$ no es primo, contradice que $q+2$ sea primo. De esta manera $q = 3$ y así $3, 5, 7$ es el único triple primo impar consecutivo. Por lo tanto $(p-2, p, p+2) = (3, 5, 7)$. Ahora podemos concluir que 5 es el único primo, que se puede representar tanto como suma y como diferencia de dos primos $5 = 2 + 3 = 7 - 2$.

Respuesta. 5

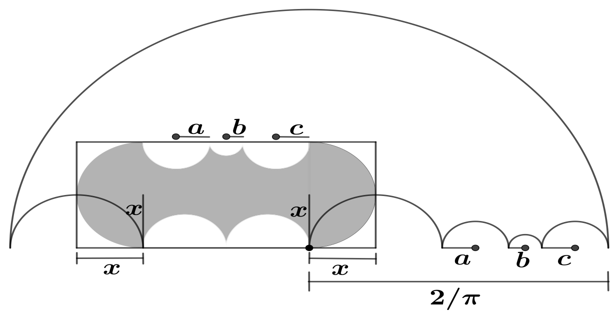
Solución. (del Problema 12)

Haciendo un análisis inductivo afirmamos que el perímetro de la circunferencia de radio $a+b$ es igual a la suma de los perímetros de las circunferencias de radio a y radio b, pues

$$\pi a + \pi b = \pi(a+b)$$



Ahora las semicircunferencias de radio x, a, b y c se ha colocado una a continuación de otra, de tal forma que se formó una semicircunferencia de radio $x+x+a+b+c = \frac{2}{\pi}$, por la afirmación anterior el perímetro de la región sombreada es $\pi(\frac{2}{\pi}) = 2$.



$\boxed{\text{Respuesta. 2}}$

Solución. (del Problema 13) Como las extracciones son al azar, debemos suponer que son extraídos todas las esferas no deseadas y una vez agotados, recién salen los requeridos en el peor de los casos.

- Al menos seis esferas azules y tres verdes.

Todos los rojos	todos los marrones	todos las azules	tres verdes
30	5	24	3

  Un total de 62 esferas extraídas.

- Al menos ocho esferas del mismo color.

Todos los marrones	rojas	azules	verdes	cualquier esfera
5	7	7	7	1

  Un total de 27 esferas.

Las sumas de ambas cantidades es $89 = 62 + 27$.

$\boxed{\text{Respuesta. 89}}$

Olimpiada Paceña de Matemática
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: `opmatumsa@fcpn.edu.bo`
`http://opmat.fcpn.edu.bo/`