21^a Olimpiada Paceña de Matemática

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Universidad Mayor de San Andrés

PRIMERA FASE

Prueba de clasificación

PREGUNTAS Y SOLUCIONES

Categoría α

1^{ro} y 2^{do} de Secundaria

Agosto, 2024

Preguntas

Tiempo estimado: 50 min

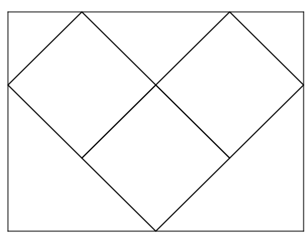
Problema 1. ¿Cuántos números enteros del 1 al 121 se pueden obtener como la suma de 7 enteros consecutivos?

(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

Problema 2. El alfabeto Malawi se compone exclusivamente de las letras A, B y C. Considerando una palabra como cualquier secuencia de hasta cuatro letras de este alfabeto, ¿cuántas palabras distintas se pueden formar?

(A) 12 (B) 50 (C) 60 (D) 111 (E) 120

Problema 3. En la siguiente figura, tenemos tres cuadrados de área igual a 1, ¿cuál es el área de la región rectangular que lo rodea?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Problema 4. En la calle donde vive Alberto, las casas se encuentran numeradas del 11 al 43. ¿Cuántas veces aparece el dígito 3 en los números de estas casas?

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

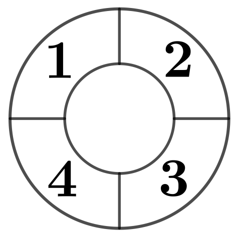
Problema 5. Los números $2, 3$ y 4 son consecutivos; los números $79, 80$ y 81 también son consecutivos. Si la suma de tres números consecutivos es 2025, ¿cuál es el número del medio?

(A) 672 (B) 673 (C) 674 (D) 675 (E) 676

Problema 6. En una carrera participaron 28 niños. El número de niños que llegaron detrás de Roberto fue el doble del número de niños que llegaron antes que él. ¿En qué lugar llegó Roberto?

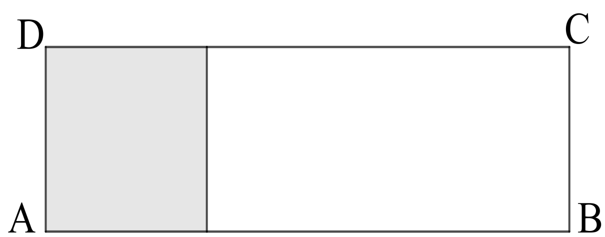
(A) sexto (B) séptimo (C) octavo (D) noveno (E) décimo

Problema 7. ¿De cuántas maneras es posible colorear las casillas en la figura dada, utilizando uno de entre cuatro colores disponibles, de modo que las casillas vecinas tengan diferentes colores?



(A) 24 (B) 72 (C) 84 (D) 92 (E) 36

Problema 8. En la siguiente figura, la región pintada de color gris corresponde a un cuadrado con un área de 36 cm^2, la cual representa 3/8 del área del rectángulo $ABCD$. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo $ABCD$?



(A) 23 (B) 31 (C) 44 (D) 50 (E) 60

Soluciones

Solución. (del Problema 1) El primer número entero positivo entre 1 y 121 que puede ser escrito como la suma de 7 enteros consecutivos es

$$1+2+3+4+5+6+7=(1+7)+(2+6)+(3+5)+4=28.$$

El siguiente es

$$2+3+4+5+6+7+8=7+(1+2+3+4+5+6+7)=7+28.$$

El siguiente es

$$3+4+5+6+7+8+9=7\times 2+(1+2+3+4+5+6+7)=7\times 2+28.$$

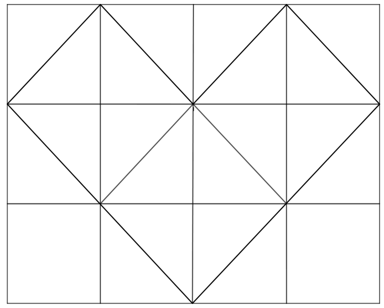
Así, los números que se van obteniendo son los múltiplos de 7 a partir de $28=7\times4$. Como no debe sobrepasar 121, el último número es $119=7\times17$, luego, existen 14 enteros entre 1 y 121 que pueden escribirse como la suma de 7 enteros consecutivos.

$$\boxed{\text{Respuesta. 14 (Opción: C.)}}$$

Solución. (del Problema 2) Se pueden formar tres palabras con una sola letra; $3^2=9$ palabras con solo dos letras, $3^3=27$ palabras con tres letras y $3^4=81$ palabras con cuatro letras. Por lo tanto, el número total de palabras en el alfabeto Malawi será $3+3^2+3^3+3^4=3+9+27+81=120$.

$$\boxed{\text{Respuesta. 120 (Opción: E.)}}$$

Solución. (del Problema 3) Divida el rectángulo en cuadrados más pequeños de modo que cada cuadrado inicial esté formado por cuatro triángulos más pequeños, vea la siguiente figura. Por lo tanto, cada uno de estos triángulos tiene un área igual a $1/4$. Como el rectángulo está formado por 24 de estos triángulos, su área es igual a $24/4=6$.



$$\boxed{\text{Respuesta. } 6 \text{ (Opción: E.)}}$$

Solución. (del Problema 4) Contaremos los números que terminan en 3 : del 11 al 43 existen 4 números que terminan en 3, estos son $13, 23, 33, 43$. Por otro lado, tenemos 10 números del 11 al 43 que empiezan en 3 los cuáles son $30, 31, 32, 33, 34, 35,$ $36,$ $37, 38, 39$. Se sigue que, el número de veces que aparece el 3 es $4 + 10 = 14$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 14 \text{ (Opción: D.)}}$$

Solución. (del Problema 5) Observe las sumas de los siguientes números consecutivos: $2 + 3 + 4 = 9$, $79 + 80 + 81 = 240$. En ambos casos la suma es el triple del número del medio. En nuestro problema la suma es 2025, que es el triple de 675, entonces este es el número del medio.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 675 \text{ (Opción: D.)}}$$

Solución. (del Problema 6) Llamemos n a la cantidad de niños que llegaron antes que Roberto. Tenemos que $2 \times n$ es la cantidad de niños que llegaron después de Roberto, así que n es la tercera parte del total de niños que participaron, menos Roberto, es decir, $n = (28-1)/3 = 27/3 = 9$. La posición en la que Roberto llegó es la décima.

$$\boxed{\text{Respuesta. décima (Opción: E.)}}$$

Solución. (del Problema 7) Resolvemos el problema considerando dos casos:

- Si las casillas 1 y 3 tienen el mismo color, hay 4 formas de elegir dicho color. Luego, para la casilla 2, podemos seleccionar entre los otros 3 colores disponibles, cualquiera excepto el color usado en las casillas 1 y 3. Lo mismo ocurre con la casilla 4. Por lo tanto, el número total de maneras de colorear en este caso es $4 \times 3 \times 3 = 36$.
- Si las casillas 1 y 3 tienen colores diferentes, podemos elegir el color de la casilla 1 de entre 4 opciones, y el color de la casilla 3 de entre 3 opciones, cualquier color excepto el de la casilla 1. Para las casillas 2 y 4, existen 2 maneras de elegir sus colores, ya que cada una debe diferir de sus casillas adyacentes. De este modo, el número total de maneras de colorear en este caso es $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$.

Finalmente, sumando los resultados de ambos casos, obtenemos que el número total de maneras de colorear la figura es $36 + 48 = 84$.

$$\boxed{\text{Respuesta. 84 (Opción: C.)}}$$

Solución. (del Problema 8) Ya que el área de un cuadrado es lado por lado, y ya que, el cuadrado pintado de color gris tiene un área de 36 cm^2, se deduce que el lado del cuadrado mide 6 cm. Denotando por A el área del rectángulo $ABCD$, por la condición del problema tenemos $\frac{3}{8} \times A = 36\ cm^2$, por lo tanto, $\frac{1}{8} \times A = 12\ cm^2$ y así, $A = 12 \times 8\ cm^2 = 96\ cm^2$. De este modo, el rectángulo $ABCD$, con un área total de 96 cm^2 y ancho AD que mide 6 cm, es tal que $CD = 16\ cm$. Se sigue que el perímetro del rectángulo es $2 \times (6 + 16) = 44\ cm$

$$\boxed{\text{Respuesta. 44 (Opción: C.)}}$$

Olimpiada Paceña de Matemática
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: opmatumsa@fcpn.edu.bo
http://opmat.fcpn.edu.bo/