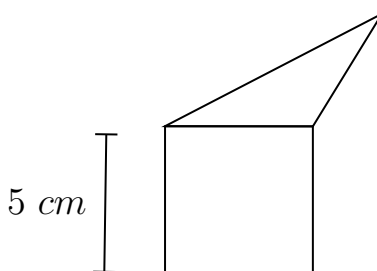


Fase Final: problemas y soluciones

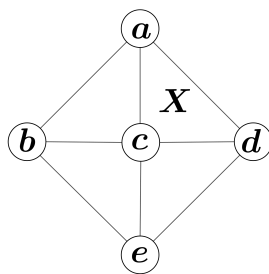
CATEGORÍA ALFA: 1RO Y 2DO DE SECUNDARIA

Problema 1. En la figura de abajo, el cuadrado y el triángulo tienen el mismo perímetro. ¿Cuál es el perímetro de la figura completa (del pentágono)?



Problema 2. Alberto tiene el mismo número de hermanos que de hermanas. Su hermana María tiene el doble de hermanos que de hermanas. ¿Cuántos hijos tienen sus papás?

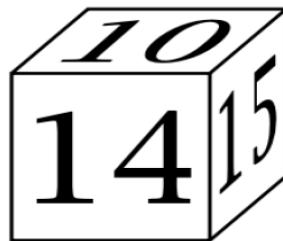
Problema 3. Denotemos por a, b, c, d y e cinco números positivos distintos tales que su suma es 25. En el diagrama adjunto, el valor de X representa el producto de los números asignados a los vértices de algún triángulo que contiene a X . ¿Cuál es el valor máximo que puede alcanzar X bajo estas condiciones?



Problema 4. En un libro, la numeración de las páginas es la siguiente: cada hoja contiene dos páginas consecutivas, con la primera hoja numerada como 1 y 2, la segunda hoja como 3 y 4, y así sucesivamente. Carlos, un niño travieso, arrancó varias hojas consecutivas del libro. Se sabe que el número de la primera página arrancada es 185, y el número de la última página arrancada tiene los mismos dígitos que 185, pero en un orden diferente. ¿Cuántas hojas arrancó Carlos?



Problema 5. Cada cara de un cubo, como se muestra en la figura, está numerada con un número entero positivo, de tal forma que el producto de los números en cada par de caras opuestas es el mismo para todos los pares. Encuentra el valor mínimo posible de la suma de los números en todas las caras del cubo.



Soluciones

Solución (Del problema 1.) Uno de los lados del triángulo mide 5 cm y la suma de los otros dos es igual a 15 cm, por tanto, el perímetro del pentágono es $15 + 15 = 30$ cm.

Respuesta. 30 cm

Solución (Del problema 2.) Si María tuviera una hermana, entonces sus hermanos serían 2, por lo que la familia constaría de dos hijos y dos hijas, pero entonces Alberto tendría sólo un hermano. Si María tiene 2 hermanas, entonces sus hermanos son 4, así que son 3 mujeres y 4 hombres, y Alberto tiene 3 hermanas y 3 hermanos. Es claro que si María tiene más de dos hermanas entonces ya serían demasiados hombres en comparación con el número de mujeres y no se tendría que Alberto tiene el mismo número de hermanos que de hermanas.

Respuesta. 7

Solución (Del problema 3.) Elija el triángulo con vértices a , c y d , el cual contiene a X . De acuerdo con los datos del problema, tenemos que $X = a \times c \times d$. Además, como $a + b + c + d + e = 25$, para maximizar el valor de X , los valores de b y e deben ser lo más pequeños posibles. Supongamos que $b + e = 3$, entonces $a + c + d = 22$. Para maximizar X , dividimos 22 en tres partes lo más equitativas posibles. Así, elegimos $a = 7$, lo que implica que $c + d = 15$. Siguiendo el mismo criterio, dividimos 15 en dos partes lo más cercanas posible, eligiendo $c = 6$ y $d = 9$ (ya que no pueden ser 7 ni 8, pues deben ser distintos de a). Por lo tanto, los números son $a = 7$, $c = 6$ y $d = 9$, y el producto máximo es $X = 7 \times 6 \times 9 = 378$.

Respuesta. 378

Solución (Del problema 4.) Dado que cualquier hoja termina en un número de página par, el número de la última página arrancada debe ser 158 o 518. Sin embargo, 158 no es una opción válida, ya que $158 < 185$. Por lo tanto, la última página arrancada corresponde al número 518. Para determinar la cantidad de páginas arrancadas entre la página 1 y la página 518, notemos que las páginas

del 1 al 184 no fueron arrancadas. Por lo tanto, se arrancaron $518 - 184 = 334$ páginas. Dado que cada hoja contiene dos páginas, el número total de hojas arrancadas es la mitad de 334, es decir, $\frac{334}{2} = 167$ hojas.

Respuesta. 167

Solución (Del problema 5.) Para determinar el valor mínimo posible de la suma de los números en las caras del cubo, los números en las caras que no son visibles deben ser lo más pequeños posible. Denotemos por a el número en la cara opuesta a la que contiene 15, por b el número en la cara opuesta a la que contiene 14, y por c el número en la cara opuesta a la que contiene 10. De acuerdo con las condiciones del problema, se cumple que

$$3 \times 5 \times a = 2 \times 7 \times b = 2 \times 5 \times c.$$

De estas relaciones se obtiene que $a = 14$, $b = 15$ y $c = 21$. Así, el valor mínimo posible de la suma de los números en todas las caras del cubo es 89.

Respuesta. 89

OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA
Av. Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: opmatumsa@fcpn.edu.bo
<http://opmat.fcpn.edu.bo/>