21^a Olimpiada Paceña de Matemática

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Universidad Mayor de San Andrés

PRIMERA FASE

Prueba de clasificación

PREGUNTAS Y SOLUCIONES

Categoría β

3^{ro} y 4^{to} de Secundaria

Agosto, 2024

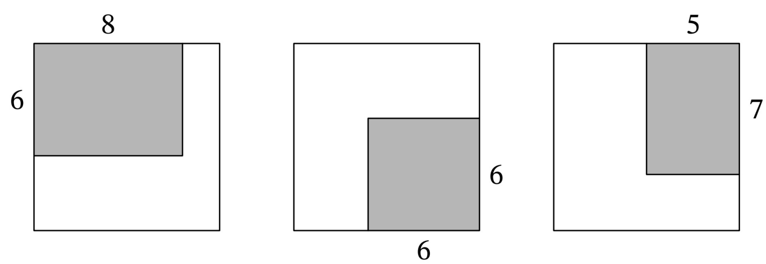
Preguntas

Tiempo estimado: 70 min

Problema 1. Alex, el león, decidió contar las rayas de Marty, la cebra. Notó que las rayas alternaban entre negras y blancas, y que había una raya negra más que rayas blancas. Además, Alex observó que todas las rayas blancas tenían el mismo grosor, mientras que las rayas negras variaban, siendo algunas gruesas y otras delgadas. Al final de su observación, descubrió que había 7 rayas blancas más que rayas negras gruesas. ¿Cuántas rayas negras delgadas tiene Marty en total?

(A) 4 (B) 7 (C) 6 (D) 8 (E) 3

Problema 2. El salón de actos de la escuela mide 10×10 metros. Sin ponerse de acuerdo, el director de la escuela, el encargado de mantenimiento y el comité de padres de familia compraron cada uno una alfombra para el salón. Decidieron utilizar las tres alfombras juntas: la primera mide 6×8 metros, la segunda 6×6 metros y la tercera 5×7 metros, y las colocaron como se muestra en la imagen. ¿Cuáles son las dimensiones del área en la que se superponen las tres alfombras?



(A) 2×1 (B) 3×1 (C) 3×5 (D) 4×3 (E) 2×3

Problema 3. En la fila para el comedor escolar hay cinco estudiantes: Ana, Boris, Vero, Gael y David. Sabemos lo siguiente:

- Boris está al principio de la fila.
- Vero está junto a Ana, pero no junto a Gael.
- Ana, Boris y Gael no están uno al lado del otro.

¿En que posición se encuentra David?

(A) *Primera* (B) *Segunda* (C) *Tercera* (D) *Cuarta* (E) *Quinta*

Problema 4. El producto de nueve números naturales consecutivos es divisible por 1111. ¿Cuál es el menor valor posible de la media aritmética de estos nueve números?

(A) 97 (B) 93 (C) 101 (D) 11 (E) 95

Problema 5. Suponga que los números enteros n y m satisfacen las siguientes desigualdades:

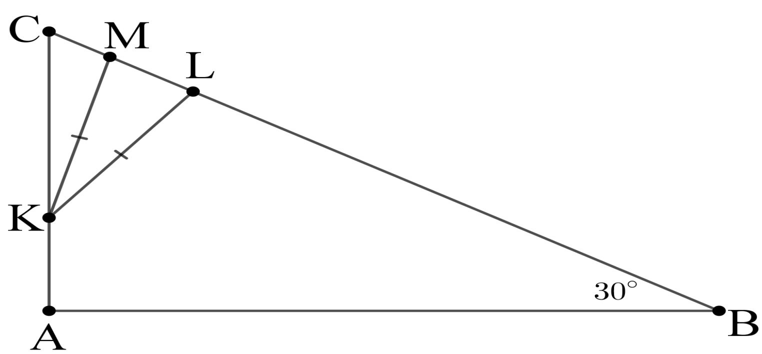
$$3n - m < 5, \quad n + m > 36 \quad \text{y} \quad 3m - 2n < 46;$$

determine todos los posibles valores que puede tomar la expresión

$$2n + m.$$

(A) $4, 2$ (B) $27, -1$ (C) $45, 12$ (D) 36 (E) 4

Problema 6. En el triángulo $\triangle ABC$, se conocen los ángulos $\angle A = 90°$ y $\angle B = 30°$. Sea K un punto en el lado AC; L y M dos puntos en el lado BC, tal que $KL = KM$, donde el punto L está ubicado en el segmento BM. Vea la siguiente figura. Supongamos también que $AK = 4$, $BL = 31$ y $MC = 3$. Determine la longitud del segmento LM.

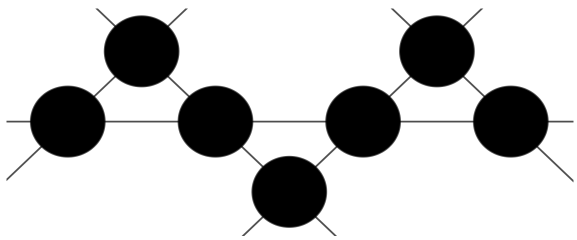


(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

Problema 7. En la fila del cine hay 16 personas, compuestas por niños y niñas, distribuidos de manera que los niños y las niñas se alternan. El primero en la fila es un niño, seguido de una niña, luego otro niño, y así sucesivamente. Cada niño puede cambiar de lugar con la niña que está justo detrás de él. Después de varios intercambios, todas las niñas quedaron al principio de la fila y todos los niños al final. ¿Cuántos intercambios se realizaron en total?

(A) 36 (B) 25 (C) 21 (D) 20 (E) 18

Problema 8. Antonio escribió los números del 1 al 8, sin repetir ninguno, en los círculos que se muestran en la figura. Se sabe que la suma de los números en cada una de las cinco líneas de la figura es la misma. Sin embargo, Antonio se dio cuenta de que uno de los números no fue escrito. ¿Qué número del 1 al 8 no usó Antonio?

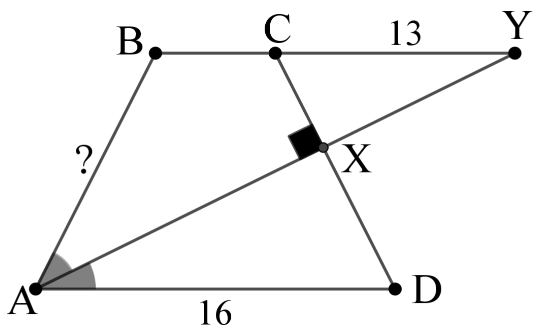


(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 4

Problema 9. Después del partido de fútbol, el entrenador alineó a su equipo en una fila, como se muestra en la imagen. Luego, dio la siguiente orden: “Diríjanse a los vestuarios aquellos cuyo número sea menor que el de cualquiera de sus vecinos”. Esta orden se repitió en rondas sucesivas, eliminando a los jugadores hasta que solo quedó uno. Si después de que Jorge se dirigió a los vestuarios quedaron tres jugadores en la fila, ¿qué número tiene Jorge?

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 4 (E) 6

Problema 10. Dado un cuadrilátero $ABCD$, con AD paralelo a BC. La bisectriz del ángulo A corta al lado CD en el punto X, y la prolongación del lado BC, más allá del punto C, lo corta en el punto Y. Se sabe que $\angle AXC = 90°$, $AD = 16$ y $CY = 13$. Determine la longitud del segmento AB.



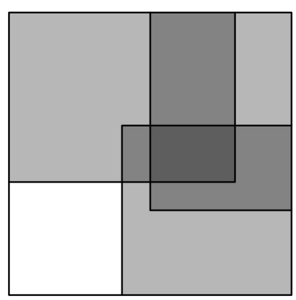
(A) 14.5 (B) 14 (C) 15.5 (D) 15 (E) 16

Soluciones

Solución. (del Problema 1) Primero consideremos sólo las rayas negras gruesas; sabemos que hay 7 rayas blancas más que rayas negras gruesas. Si sumamos las rayas negras delgadas a las rayas negras gruesas, obtendremos el total de rayas negras, que es una más que el total de rayas blancas. Para encontrar el número de rayas negras delgadas, debemos "compensar" las 7 rayas blancas adicionales en comparación con las rayas negras gruesas y luego agregar una más. Por lo tanto, el número de rayas negras delgadas es $7 + 1 = 8$.

Respuesta. 8 (Opción: D.)

Solución. (del Problema 2) La segunda y tercera alfombra se superponen en un rectángulo de 5×3 metros, 5 metros horizontalmente y 3 metros verticalmente, adyacente al lado derecho del salón de la escuela, a 4 metros de la parte superior y a 3 metros de la parte inferior. Este rectángulo se cruza con la primera alfombra 6×8 metros, horizontalmente entre el quinto y el octavo metro desde el lado izquierdo del salón de actos, y verticalmente entre el cuarto y el sexto metro desde la parte superior. Como resultado, obtenemos un rectángulo de 2×3 metros.



Respuesta. 2×3 (Opción: E.)

Solución. (del Problema 3) Numeremos los puestos en la fila del 1 al 5: el puesto número 1 es el primero en la fila y el puesto número 5 es el último. Basándonos en las condiciones dadas, procedemos a determinar la ubicación de los estudiantes. Según la primera condición, Boris está en el puesto número 1. Por la tercera condición Ana y Gael deben ocupar los puestos número 3 o 5, pues no están juntos:

- Puesto número 1 - Borís
- Puesto número 2 - ?
- Puesto número 3 - Ana o Gael
- Puesto núemro 4 - ?
- Puesto número 5 - Ana o Gael

De acuerdo con la segunda condición, Vero debe estar al lado de Ana, pero no puede estar al lado de Gael. Así, Vero no puede estar en el puesto número 4, luego Vero debe estar en el puesto número 2. Ahora sabiendo que Vero está en el puesto número 2, Ana debe estar en el puesto número 3, ya que Vero está al lado de Ana, y Gael está en el puesto número 5, ya que no puede estar al lado de Vero. Esto deja el puesto número 4 para David.

$$\boxed{\text{Respuesta. } \textit{Cuarta} \text{ (Opción: D.)}}$$

Solución. (del Problema 4) Consideremos un número natural n y denotemos por $n, n+1, \ldots, n+8$ los nueve números consecutivos del problema. Notemos que la media aritmética de estos es $n+4$. Para que el producto de estos números sea divisible por $1111 = 11 \times 101$, al menos uno de los factores debe ser divisible por 11 y 101. Esto implica que al menos uno de los nueve números debe ser mayor o igual a 101, por lo que $n+8 \geq 101$ y por tanto $n+4 \geq 97$. De los siguientes nueve números naturales $93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101$, el valor $n+4 = 97$ es el más pequeño que puede tomar la media aritmética bajo las condiciones dadas , ya que 99 es divisible por 11 y 101 es divisible por 101.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 97 \text{ (Opción: A.)}}$$

Solución. (del Problema 5) Dado que los números m y n son enteros, los valores de las expresiones de la condición $3n - m$, $m + n$, $3m - 2n$, también son números enteros. Entonces

$$\begin{cases} 3n - m \leq 4 \\ \\ n + m \geq 27 \\ \\ 3m - 2n \leq 45 \end{cases}$$

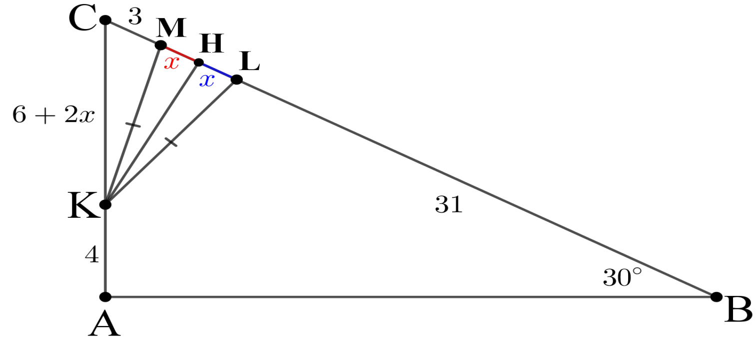
Sumando la primera desigualdad (multiplicado por 3) con la tercera desigualdad, obtenemos $7n \leq 57$, de donde $n \leq 8$. Sumando la primera desigualdad (multiplicada por 2) con la tercera desigualdad (multiplicada por 3) obtenemos $7m \leq 143$, de donde $m \leq 20$. Entonces $n \leq 8$, $m \leq 20$, con $n + m \geq 27$. Esto sólo es posible en tres casos:

- Si $n = 7$, $m = 20$. Entonces no se cumple la condición $3m - 2n \leq 45$.
- Si $n = 8$, $m = 19$. Entonces no se cumple la condición $3n - m \leq 4$.
- Si $n = 8$, $m = 20$, se verifican todas las desigualdades.

Tenemos entonces que $2n + m = 2 \cdot 8 + 20 = 36$.

$\boxed{\text{Respuesta. 36 (Opción: D.)}}$

Solución. (del Problema 6) En el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, con $\angle A = 90°$ y $\angle B = 30°$, utilizaremos el hecho: en un triángulo rectángulo con un ángulo de $30°$, el cateto opuesto a ese ángulo mide la mitad de la hipotenusa. Considereamos el triángulo isósceles $\triangle KLM$ y dejamos caer la altura HK desde K al segmento, vea el siguiente gráfico. Dado que esta altura también es una mediana, se cumple que $MH = HL = x$.



En el triángulo rectángulo $\triangle CKH$, dado que $\angle CKH = 90° - \angle C = \angle B = 30°$, tenemos que $KC = 2 \cdot CH = 2 \cdot (CM + MH) = 2 \cdot (3 + x) = 6 + 2x$. En el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con $\angle B = 30°$, se cumple que $BC = 2 \cdot AC$. Planteamos y resolvemos la ecuación lineal correspondiente:

$$31 + 2x + 3 = 2 \cdot (4 + 6 + 2x).$$

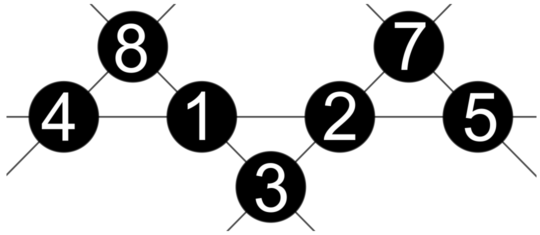
Resolviendo esta ecuación, encontramos que $x = 7$, por lo tanto, la longitud del segmento LM es: $LM = 2x = 2 \cdot 7 = 14$.

$\boxed{\text{Respuesta. 14 (Opción: B.)}}$

Solución. (del Problema 7) Cada niño hará un intercambio con cada niña que esté en la fila después de él, es decir, el primer niño hará un total de 8 intercambios, el segundo 7, el tercero 6, etc., entonces el número total de intercambios será $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$. De esta manera cada niño cede el paso a la niña que está a su lado, así todas las niñas se encontrarán al frente de la fila.

$\boxed{\text{Respuesta. 36 (Opción: A.)}}$

Solución. (del Problema 8) Cada número está escrito exactamente en dos líneas, por lo tanto, la suma total de todos los números utilizados, multiplicada por 2, es cinco veces mayor que la suma de los números en una línea $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$, ya que la suma de cada una de las cinco líneas son iguales. Por tanto, la suma de todos los números es divisible por 5; teniendo en cuenta que $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$, para que la suma de los números utilizados sea divisible por 5, Antonio debe descartar el 1 o el 6. Si Antonio no usa el 1, entonces se tiene $(2+3+4+5+6+7+8) \cdot 2/5 = 14$; sin embargo, 14 puede ser expresado como la suma de dos números (dado que algunas líneas tienen solo dos números) de única manera: $6+8 = 14$. Esto restringe demasiado las combinaciones posibles, haciendo difícl cumplir con todas las condiciones del problema. En cambio, si excluimos el número 6, podemos trabajar con las otras combinaciones de números que son más flexibles para formar las líneas. Esto significa que Antonio no usa el número 6. Un ejemplo de cómo puede resolver la tarea es el siguiente:

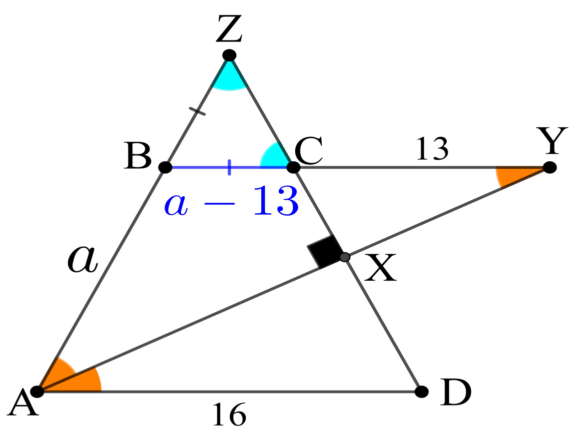


$\boxed{\text{Respuesta. } 6 \text{ (Opción: C.)}}$

Solución. (del Problema 9) En la primera ronda, los jugadores con los números más pequeños son $3, 7, 2, 1$, y se van. En la segunda ronda, se van los jugadores con números $9, 6$ y 4. En la tercera ronda, se va Jorge, es decir, tenía el número 5.

$\boxed{\text{Respuesta. } 5 \text{ (Opción: B.)}}$

Solución. (del Problema 10) Denotemos $AB = a$ y observemos que $\angle BYA = \angle YAD = \angle YAB$, esto implica que el triángulo $\triangle ABY$ es isósceles ($AB = BY$), y así, $BC = BY - CY = AB - CY = a - 13$, vea la siguiente figura:



Prolongamos los rayos AB y DC hasta que se crucen en el punto Z. En el triángulo $\triangle ADZ$, la bisectriz AX coincide con la altura, por lo que el triángulo es isósceles

$(AZ = AD)$. Además, dado que $\angle BZC = \angle ADC = \angle BCZ$, el triángulo $\triangle BCZ$ también es isósceles $(BZ = BC)$. El segmento AZ es, por un lado, igual a AD, es decir 16. Por otro lado, $AZ = AB + BZ = AB + BC = a + (a - 13) = 2a - 13$. Resolviendo la ecuación obtenida tenemos que

$$\begin{aligned} 16 &= 2a - 13 \\ 2a &= 29 \\ a &= 14.5, \end{aligned}$$

por tanto, la longitud del segmento AB es 14.5.

Respuesta. 14.5 (Opción: A.)

Olimpiada Paceña de Matemática
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: opmatumsa@fcpn.edu.bo
http://opmat.fcpn.edu.bo/