Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática
Olimpiada Paceña de Matemática

β

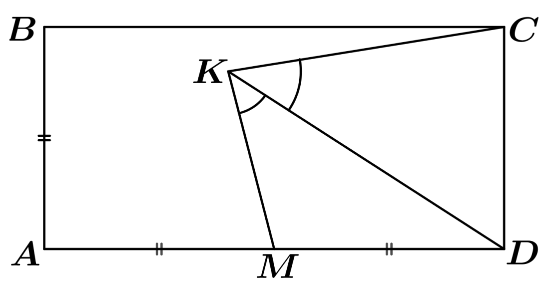
Fase Final: problemas y soluciones

Categoría beta: 3ro y 4to de secundaria

Problema 1. Dado un triángulo ABC con lados $AB = 13$, $BC = 14$ y $CA = 15$. Calcular la longitud de la altura trazada desde el vértice A hasta el lado BC.

Problema 2. Considera un tablero de 21×21 celdas. Inicialmente, una pieza se encuentra en la celda central del tablero. En un solo movimiento, la pieza puede desplazarse a una celda adyacente que comparta un lado común con la celda actual. Ana realizó 10 movimientos. ¿Cuántas celdas diferentes puede ocupar la pieza después de esos 10 movimientos?

Problema 3. En la figura dada, el rectángulo $ABCD$ satisface $AD = 2AB$ y M es el punto medio del lado AD. En el interior del rectángulo se marcó un punto K tal que $\angle AMK = 80°$ y tal que el rayo KD es la bisectriz del ángulo $\angle MKC$. ¿Determine la medida del ángulo $\angle KDA$?



Problema 4. Sea $P(x)$ un polinomio cuadrático que satisface la ecuación:

$$P(P(x)) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 4.$$

Determinar todos los posibles valores de $P(8)$.

Soluciones

Solución (Del problema 1.) Aplicamos la fórmula de Herón para calcular el área del triángulo ABC, donde $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, y $p = \frac{a+b+c}{2}$ es el semiperímetro. La fórmula establece que el área del triángulo es

$$\text{Área} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

En nuestro caso, tenemos $a = 13$, $b = 14$, y $c = 15$. El semiperímetro es

$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21.$$

Sustituyendo en la fórmula de Herón, el área del triángulo resulta ser

$$\text{Área} = \sqrt{21 \times (21 - 13) \times (21 - 14) \times (21 - 15)} = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = 84.$$

Ahora, denotando por h la altura trazada desde el vértice A hasta el lado BC, utilizamos la fórmula del área para un triángulo:

$$\frac{a \cdot h}{2} = 84,$$

donde $a = 14$. Se sigue que $h = \frac{2 \cdot 84}{14} = 12$. Así, la altura del triángulo desde el vértice A hasta el lado BC es $h = 12$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 12}$$

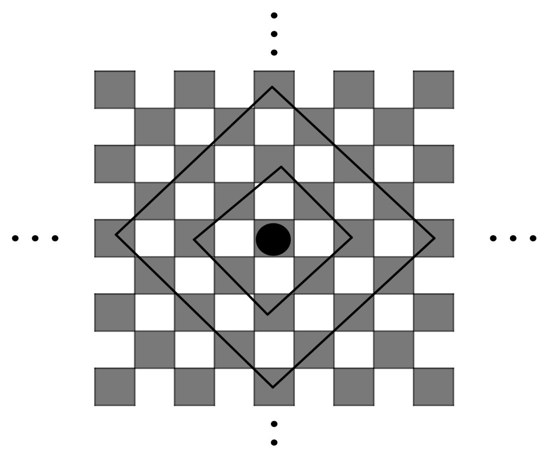
Solución (Del problema 2.) Pintemos todo el tablero como un tablero de ajedrez (ver figura), de modo que el cuadrado central del tablero sea negro. Cada vez que la pieza se mueve a una celda adyacente, cambia el color de la celda en la que se encuentra. Esto implica que, después de un número impar de movimientos, la pieza siempre terminará en una casilla blanca, y después de un número par de movimientos, siempre terminará en una casilla negra. Por lo tanto, después de 10 movimientos, la pieza necesariamente estará en una casilla negra. Ahora demostraremos que todas las casillas negras alcanzables en no más de 10 movimientos se pueden alcanzar en exactamente 10 movimientos. Consideremos una casilla negra arbitraria A que es alcanzable en menos de 10 movimientos desde la casilla central. Dado que se llegó a la casilla A con un número par de movimientos menor que 10, podemos simplemente mover la pieza a una celda adyacente y luego regresar, completando así exactamente 10 movimientos. Esto nos lleva a contar el número de casillas negras que se pueden alcanzar en no más de 10 movimientos. El número de casillas negras alcanzables se puede determinar de la siguiente manera:

- En 0 movimientos, solo se puede estar en la casilla inicial.
- En 2 movimientos, se puede regresar a la casilla inicial o moverse a $4 \cdot 2 = 8$ celdas nuevas.
- En 4 movimientos, se puede acceder a las celdas previamente alcanzadas y a $4 \cdot 4 = 16$ celdas nuevas.
- Este patrón continúa, aumentando el número de celdas alcanzables en cada paso.

Por lo tanto, el número total de celdas alcanzables en no más de 10 pasos es

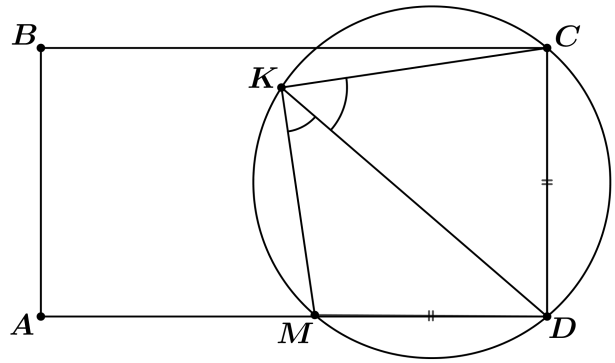
$$1 + 8 + 16 + 24 + 32 + 40 = 1 + 8(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 121.$$

De este modo, se concluye que hay 121 casillas negras que se pueden alcanzar en un máximo de 10 movimientos.



$\boxed{\text{Respuesta. 121}}$

Solución (Del problema 3.) Aplicaremos el criterio de congruencia de triángulos que establece lo siguiente: si dos triángulos tienen dos pares de lados correspondientes congruentes y el ángulo opuesto a esos lados también es congruente, entonces los triángulos son congruentes. A partir de esto, se deduce que la suma de los otros dos ángulos internos en cada triángulo es $180°$. Este criterio se cumple para los triángulos MDK y CDK pues: $MD = DC$, DK es común a ambos a triángulos y $\angle MKD = \angle CKD$. Sin embargo, los ángulos KMD y KCD no son iguales pues el primero es obtuso y el segundo es agudo, así su suma es igual a $180°$, y estos implica que los ángulos opuestos del cuadrilátero $KMDC$ suman $180°$. Por tanto, el cuadrilátero es cíclico.



Ya que $KMDC$ es cíclico, la suma de los ángulos opuestos es igual a 180°, así

$$\angle MKD = \frac{\angle MKC}{2} = \frac{180^\circ - \angle MDC}{2} = 45^\circ.$$

El ángulo AMK es externo al triángulo KDM, luego es igual a la suma de los ángulos MKD y KDA, así el ángulo buscado KDA es igual a $80^\circ - 45^\circ = 35^\circ$.

$\boxed{\text{Respuesta. } 35^\circ}$

Solución (Del problema 4.) Escribimos el polinomio cuadrático en la forma $P(x) = x^2 + bx + c$, donde b y c son constantes a determinar. Entonces, se tiene:

$$\begin{aligned} P(P(x)) &= (x^2 + bx + c)^2 + b(x^2 + bx + c) + c \\ &= x^4 + 2bx^3 + (b^2 + 2c + b)x^2 + (2bc + b^2)x + (c^2 + bc + c). \end{aligned}$$

De acuerdo con la ecuación dada en el problema, podemos establecer las siguientes relaciones:

- $2b = -2$,
- $b^2 + 2c + b = 4$,
- $2bc + b^2 = -3$,
- $c^2 + bc + c = 4$.

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos que $b = -1$ y $c = 2$. Por lo tanto, el polinomio es $P(x) = x^2 - x + 2$. Finalmente, calculamos

$$P(8) = 8^2 - 8 + 2 = 64 - 8 + 2 = 58.$$

$\boxed{\text{Respuesta. } 58}$

Olimpiada Paceña de Matemática
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: opmatumsa@fcpn.edu.bo
http://opmat.fcpn.edu.bo/