Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática
Olimpiada Paceña de Matemática

β

Segunda Fase: problemas y soluciones

Categoría Beta: 3ro y 4to de secundaria

Parte 1: Problemas de selección múltiple

Problema 1. Un comerciante compró un lote de bolígrafos a un precio unitario desconocido. Luego, los vendió al público de dos maneras: algunos clientes compraron un bolígrafo por 10 bolivianos, mientras que otros compraron paquetes de 3 bolígrafos por 20 bolivianos. Si el comerciante obtuvo la misma ganancia total en ambas modalidades de venta, ¿cuál es el precio de compra de cada bolígrafo?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Problema 2. Tres alumnas fueron a una tienda. Ana compró 2 bolígrafos, 7 lápices y 1 cuaderno; Vanesa compró 5 bolígrafos, 6 lápices y 5 cuadernos; y Sara compró 8 bolígrafos, 4 lápices y 9 cuadernos. Aunque todas pagaron la misma cantidad total, una de ellas recibió un descuento. ¿Quién fue?

(A) Ana (B) Vanesa (C) Sara (D) Todas (E) Ninguna

Problema 3. En un momento dado, Ana midió el ángulo entre las agujas de su reloj (la del horario y la del minutero). Una hora después, volvió a medir el ángulo entre las agujas y notó que era el mismo que antes. ¿Cuáles son los posibles valores de ese ángulo?

(A) $15°$ o $165°$ (B) $25°$ o $155°$ (C) $35°$ o $145°$

(D) $45°$ o $135°$ (E) $50°$ o $130°$

Problema 4. En el triángulo $\triangle ABC$ trazamos la mediana AM, donde M es el punto medio del lado BC. Si $\angle BAC = 45°$ y $\angle BCA = 30°$, determinar el valor del ángulo $\angle AMC$.

(A) 45° (B) 150° (C) 135° (D) 125° (E) 15°

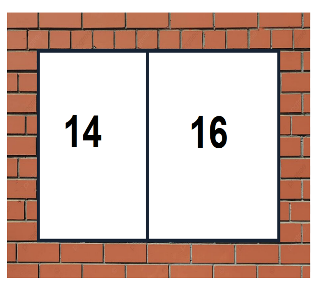
Problema 5. Dos caminantes comenzaron a caminar al amanecer, uno desde el punto A hacia el punto B y el otro desde el punto B hacia el punto A, ambos a velocidades constantes. Se encontraron a las 12:00 del mediodía y continuaron caminando sin detenerse. El primer caminante llegó a B a las 4:00 de la tarde, y el segundo caminante llegó a A a las 9:00 de la noche. ¿A qué hora comenzaron a caminar ese día?

(A) 02:15 a.m. (B) 09:00 a.m. (C) 05:00 a.m.

(D) 03:30 a.m. (E) 06:00 a.m.

Parte 2: Preguntas de respuesta corta numérica

Problema 6. Se tiene una ventana cuadrada que está dividida en dos partes por dos marcos rectangulares. Cada marco rectangular tiene un número escrito en su interior que representa su perímetro. Determina la longitud del lado del cuadrado que forma la ventana completa.



Problema 7. ¿Cuántas veces aparece el dígito 1 en el número resultante obtenido como la suma de la serie

$$9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{9\ldots9}_{2024}\,?$$

Problema 8. Sabiendo que $a^2 + b = b^2 + c = c^2 + a$. ¿Cuál es el valor de la expresión
$$a(a^2 - b^2) + b(b^2 - c^2) + c(c^2 - a^2) \ ?$$

Problema 9. Un grupo de seis turistas se divide en dos roles en cada lugar turístico: tres turistas toman fotografías y tres turistas son fotografiados. Cada turista debe aparecer en las fotografías de todos los demás turistas al menos una vez. ¿Cuál es el número mínimo de lugares turísticos necesarios para que todos los turistas tengan fotografías en las que aparezcan todos los demás turistas?

Problema 10. Dado un conjunto de 10 rectas en el plano, donde exactamente dos de ellas son paralelas y no hay más de dos rectas que se crucen en un mismo punto, excepto en un punto específico donde exactamente tres rectas se intersectan, determina el número total de puntos de intersección entre estas rectas.

Soluciones

Parte 1: Soluciones a los problemas de selección múltiple

Solución. (Del problema 1) Denotemos por x el precio unitario de un bolígrafo. La ganancia por cada bolígrafo en el primer tipo de venta es igual a $10 - x$, mientras que, la ganancia obtenida por el segungo tipo de venta es igual a $20 - 3x$. Ya que ambas ganancias coinciden, tenemos la ecuación de primer grado $10 - x = 20 - 3x$, cuya solución es $x = 5$. El precio unitario de cada bolígrafo es de 5 bolivianos.

Respuesta. 5 (Opción: C.)

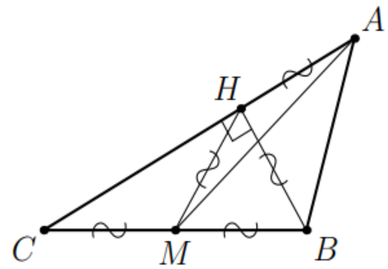
Solución. (Del problema 2) Denotemos por a, b y c los precios de un bolígrafo, un lápiz y un cuaderno, respectivamente. También denotemos por A, V y S, los costos totales de las compras de Ana, Vanesa y Sara, respectivamente. De acuerdo a las condiciones del problema, tenemos las relaciones $A = 2a + 7b + c$, $V = 5a + 6b + 5c$ y $S = 8a + 4b + 9c$. Tenemos así $A + S = 2V - b$, es decir $2V$ es mayor que $A + S$. Se sigue que, el costo total de la compra de Vanesa es mayor que el costo total de la compra de una de las otras chicas y, ya que todas pagaron lo mismo, sólo Vanesa podría recibir el descuento.

Respuesta. Vanesa (Opción: B.)

Solución. (Del problema 3) Al pasar una hora, la aguja del minutero regresa a la misma posición, mientras que la aguja del horario gira $30°$. Ya que el ángulo entre las agujas no cambió, tenemos sólo dos posibilidades: la aguja del horario estaba a $15°$ antes de la aguja del minutero o estaba a $165°$ después de la aguja del minutero, como se muestra en la siguiente figura. Así, los posibles ángulos formados son $15°$ o $165°$.

Respuesta. $15°$ o $165°$ (Opción: A.)

Solución. (Del problema 4) En el triángulo $\triangle ABC$ trace la altura BH desde el vértice B al lado AC. Ya que $\angle BAC = 45°$, el triángulo $\triangle BHA$ es isósceles, luego $BH = AH$. El ángulo $\angle BCH = \angle BCA$ es igual a $30°$ y, ya que el cateto BH está opuesto a este ángulo, se tiene que $BC = 2BH$. Vea la figura.



En $\triangle BHC$ trace la mediana desde el vértice H hasta el punto medio M de BC, por lo tanto, $HM = BC/2$, luego $HM = MB$ y $HM = BH$, es decir, el triángulo $\triangle MBH$ es equilátero. Así, ya que $\angle HMB = 60°$, se tiene que $\angle CMH = 120°$. Por otro lado, se tiene $\angle AHM = 90° + 60° = 150°$, y ya que $AH = BH = HM$, el triángulo $\triangle AHM$ es isósceles, luego $\angle AMH = 15°$. Finalmente, tenemos que $\angle AMC = 15° + 120° = 135°$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 135° \text{ (Opción: C.)}}$$

Solución. (Del problema 5) Denotemos por C el punto de encuentro entre los dos caminantes y denotemos por x el número de horas transcurridas desde el momento que comenzaron a caminar hasta hasta el punto de encuentro. La velocidad del primer caminante en el tramo AC es igual a AC/x, mientras que en el tramo BC es igual a $BC/4$; al ser la velocidad constante se tiene $AC/x = BC/4$, luego $AC/BC = x/4$. De manera similar, para el segundo caminante, igualando las velocidades en los tramos BC y AC obtenemos $BC/x = AC/9$, luego $AC/BC = 9/x$. Se tiene así la ecuación

$$\frac{x}{4} = \frac{9}{x},$$

cuya solución es $x = 6$. Por tanto, la caminata comenzó a las 6:00 de la mañana.

$$\boxed{\text{Respuesta. 06:00 a.m. (Opción: E.)}}$$

Parte 2: Soluciones a los problemas de respuesta corta

Solución. (Del problema 6) Denotemos por a la longitud del lado del cuadrado que forma la ventana y denotemos por b la anchura del marco rectangular izquierdo. Entonces, la anchura del marco rectangular derecho es igual a $a - b$. De acuerdo con el enunciado del problema, el perímetro del marco rectangular izquierdo está dado por la ecuación $2a + 2b = 14$. Por otra lado, el perímetro del marco rectangular derecho se expresa como $2a + 2(a - b) = 16$; sumando ambas ecuaciones tenemos $6a = 30$, por tanto $a = 5$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 5}$$

Solución. (Del problema 7) Realizamos las operaciones siguientes:

$$\begin{aligned} 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{9\ldots9}_{2024} &= (10 - 1) + (100 - 1) + \cdots + (10^{2024} - 1) \\ &= \underbrace{1\ldots1}_{2024}0 - 2024 \\ &= \underbrace{1\ldots1}_{2020}09086. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Respuesta. } 2020}$$

Solución. (Del problema 8) Note que la igualdad $a^2+b = b^2+c$ puede escribirse como $a^2 - b^2 = c - b$. De manera similar, $b^2 - c^2 = a - c$ y $c^2 - a^2 = b - a$. Sustituyendo estas igualdades en las expresiones correspondientes se tiene que

$$a(a^2 - b^2) + b(b^2 - c^2) + c(c^2 - a^2) = a(c - b) + b(a - c) + c(b - a) = 0.$$

$$\boxed{\text{Respuesta. } 0}$$

Solución. (Del problema 9) Identificamos a los seis turistas con las iniciales A, B, C, D, E y F, y organizamos a los turistas en grupos de tres y por cada lugar turístico visitado. En el primer lugar turístico, los turistas (A, B, C) sacan fotos a (D, E, F); en el segundo lugar turístico, los turistas (A, D, E) sacan fotos a (B, C, F); en el tercer lugar turístico, los turistas (B, C, D) sacan fotos a (A, E, F); finalmente, en el cuarto lugar turístico, los turistas (C, D, F) sacan fotos a (A, B, E). El número mínimo de lugares turísticos es 4.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 4}$$

Solución. (Del problema 10) Numeremos las rectas del 1 a 10 y supongamos que las rectas $1, 2$ y 3 se crucen en un único punto, al cual denotamos por P. Consideremos todas las posibles parejas de rectas: 1 y 2; 1 y 3; 1 y 4; $\ldots$; 8 y 9; 8 y 10; 9 y 10. En total existen 45 pares de rectas: 9 pares para la recta 1, 8 pares para la recta 2, y así sucesivamente, hasta llegar a la recta 9 que sólo forma un par, así $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$. Según las condiciones del problema, exactamente dos de estas rectas son paralelas, por lo que no se intersectan, así, tenemos inicialmente 44 puntos de intersección. Todos los puntos de intersección, excepto P, se encuentran exactamente una vez. Sin embargo, el punto P aparece tres veces, una vez por cada par de las rectas 1 y 2, 1 y 3, y 2 y 3, luego quitamos dos puntos de intersección. Por tanto, el número total de puntos de intersección únicos es 42.

$\boxed{\text{Respuesta. } 42}$

Olimpiada Paceña de Matemática
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: opmatumsa@fcpn.edu.bo
http://opmat.fcpn.edu.bo/