21^a OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS.

PRIMERA FASE

Prueba de clasificación

PREGUNTAS Y SOLUCIONES

CATEGORÍA γ

5^{to} Y 6^{to} DE SECUNDARIA

Agosto, 2024

Preguntas

Tiempo estimado: 80 min

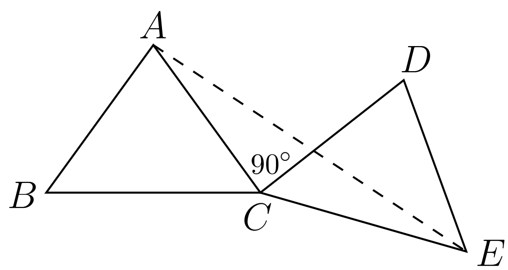
Problema 1. Alfredo eliminó un número de una lista de 10 números consecutivos. Después de eliminarlo, la suma de los números restantes es 2024. ¿Cuál de los siguientes números fue eliminado?

(A) 219 (B) 220 (C) 221 (D) 222 (E) 223

Problema 2. Determine cuál es la letra que está en la posición 2024 de la secuencia repetida OPMATUMSAOPMATUMSA...

(A) O (B) P (C) M (D) S (E) A

Problema 3. En la siguiente figura, los triángulos ABC y CDE son equiláteros e iguales. Si el ángulo $\angle ACD$ mide $90°$, ¿cuánto mide el ángulo $\angle AED$?



(A) $25°$ (B) $30°$ (C) $35°$ (D) $40°$ (E) $45°$

Problema 4. ¿Cuál es la suma de todos los enteros positivos n que dejan 15 como residuo al dividir 141 entre n?

(A) 312 (B) 270 (C) 146 (D) 150 (E) 290

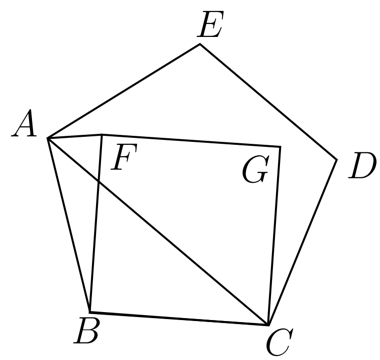
Problema 5. ¿Cuál es la suma de los dígitos de $\underbrace{111\cdots111}_{2024-\text{veces}}\times 101$?

(A) 4048 (B) 4044 (C) 4040 (D) 4036 (E) 4032

Problema 6. En un triángulo ABC tenemos que P es el punto medio de AB y Q es el punto medio de AC. Si el área del triángulo PQC es igual a 1, ¿cuál es el área del triángulo ABC?

(A) $3\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{5}$ (D) 4 (E) 3

Problema 7. En la siguiente figura $ABCDE$ es un pentágono regular y $BCGF$ es un cuadrado. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle FAC$?



(A) $72°$ (B) $60°$ (C) $54°$ (D) $45°$ (E) $36°$

Problema 8. ¿Cuántos números de 3 dígitos abc, con $a \neq 0$, son tales que $a+3b+c$ es múltiplo de 3?

(A) 330 (B) 300 (C) 360 (D) 600 (E) 990

Problema 9. Sea f una función de los números reales en los números reales. Suponga que para cualquier número real x se satisface

$$3f(x-1) - f(x) = 3x^2 - 1.$$

Encuentre el valor de $f(0)$.

(A) 1 (B) $3/2$ (C) $3/5$ (D) $3/7$ (E) $5/8$

Problema 10. En un salón de clases hay 60 niños alineados en 6 filas y 10 columnas. Cada niño le da la mano a todos los niños que se sientan a su lado (incluyendo los que se sientan diagonalmente a su lado). ¿Cuántos saludos hubo?

(A) 240 (B) 120 (C) 360 (D) 194 (E) 324

Soluciones

Solución. (del Problema 1) Al sumar 10 números consecutivos distintos, cada uno termina en un dígito distinto, así que la suma de todos termina en lo que termina $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$, es decir, termina en 5. Como la suma dio 2024, entonces el número que se eliminó termina en 1; la única posibilidad es 221 (y los números consecutivos son $220, 221, \cdots, 229$).

$$\boxed{\text{Respuesta. } 221 \text{ (Opción: C.)}}$$

Solución. (del Problema 2) Para encontrar la letra en la posición 2024, necesitamos calcular el residuo de la división de 2024 entre 9 (el número de letras en el ciclo que se repite OPMATUMSA). Esto nos indicará la posición dentro de un ciclo completo de 9 letras. Ya que,

$$2024 = 9 \times 224 + 8,$$

el residuo de 8 significa que la letra en la posición 2024 corresponde a la octava letra en el ciclo que se repite OPMATUMSA.

$$\boxed{\text{Respuesta. S (Opción: D.)}}$$

Solución. (del Problema 3) Ya que los triángulos son iguales, el triángulo ACE es isósceles, de base AE, en particular, los ángulos $\angle CAE$ y $\angle CEA$ son iguales. Ya que el triángulo CDE es equilátero, $\angle DCE = 60°$, así, $\angle ACE = 90°+60° = 150°$; se sigue que $\angle CEA = 15°$, luego $\angle AED = 60° - \angle CEA = 60° - 15° = 45°$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 45° \text{ (Opción: E.)}}$$

Solución. (del Problema 4) Sabemos que n debe ser un divisor de $141 - 15 = 126$ que sea mayor a 15. Ya que $126 = 2 \times 3^2 \times 7$, las posibilidades para n son $18, 21, 42, 63$ y 126, así que la suma de todos estos es 270.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 270 \text{ (Opción: B.)}}$$

Solución. (del Problema 5) Realicemos las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}
\underbrace{111\cdots111}_{2024-\text{veces}}\times 101 &= \underbrace{111\cdots111}_{2024-\text{veces}}\times(100+1)\\
&= \underbrace{111\cdots111}_{2024-\text{veces}}\times 100 + \underbrace{111\cdots111}_{2024-\text{veces}}\\
&= \underbrace{111\cdots111}_{2024-\text{veces}}00 + \underbrace{111\cdots111}_{2024-\text{veces}}\\
&= 11\underbrace{22\cdots22}_{2022-\text{veces}}11,
\end{aligned}$$

por tanto, la suma de los dígitos es $1+1+(2\times 2022)+1+1 = 4048$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 4048 \text{ (Opción: A.)}}$$

Solución. (del Problema 6) Notemos que el área de APQ es igual al área de PQC, que es igual a 1, pues $AQ = QC$ y la altura desde P de ambos triángulos es la misma. Comparemos las áreas de PQC y PCB. Tenemos que $PQ = \frac{1}{2}BC$, y la altura de PQC desde C coincide con la altura de PCB desde P pues PQ es paralelo a BC. Por lo anterior, el área de PCB es el doble del área de PQC, es decir, es igual a 2. El área de ABC es la suma de las áreas de APQ, PQC y PCB, así que es igual a $1+1+2 = 4$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 4 \text{ (Opción: D.)}}$$

Solución. (del Problema 7) Como $ABCDE$ es regular, sabemos que $\angle ABC = 108^\circ$ y que $\angle BAC = 36^\circ$. De esta forma, $\angle ABF = 108^\circ - 90^\circ = 18^\circ$ y como el triángulo ABF es isósceles entonces $\angle FAB = (108^\circ - 18^\circ)/2 = 81^\circ$ por lo que $\angle FAC = 81^\circ - 36^\circ = 45^\circ$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 45 \text{ (Opción: D.)}}$$

Solución. (del Problema 8) Ya que $3b$ siempre es un múltiplo de 3 entonces $a+c$ debe ser un múltiplo de 3. Por el criterio de divisibilidad entre 3 deducimos que el número de 2 dígitos ac debe ser también un múltiplo de 3. Hay 90 números de 2 dígitos, y 1/3 de ellos son múltiplos de 3, o sea 30. Como hay 10 posibilidades para elegir el dígito b, en total hay $30 \times 10 = 300$ números que cumplen la condición.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 300 \text{ (Opción: B.)}}$$

Solución. (del Problema 9) Ya que la igualdad $3f(x-1)-f(x) = 3x^2-1$ es válida para cada valor de x, podemos tomar x como $x-1$, tenemos así $3f(x)-f(x-1) = 3(x-1)^2 - 1 = 3x^2 - 6x + 2$. En la segunda ecuación del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3f(x-1) - f(x) = 3x^2 - 1 \\ 3f(x) - f(x-1) = 3x^2 - 6x + 2 \end{cases}$$

multiplicamos por 3 y luego sumamos ambas ecuaciones miembro a miembro, obtenemos

$$8f(x) = 12x^2 - 18x + 5,$$

se sigue que $f(0) = 5/8$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 5/8 \text{ (Opción: E.)}}$$

Solución. (del Problema 10) Los 4 niños que están en las esquinas saludan a 3 niños cada uno. En las orillas (pero no en las esquinas) hay 24 niños; cada uno saluda a 5 niños. Cada uno de los niños que no está en la orilla (hay 32) saluda a 8 niños. Si hacemos la suma de todos estos saludos, tendremos el doble del total (pues cada saludo se cuenta dos veces), así que el número total de saludos es

$$\frac{4 \times 3 + 24 \times 5 + 32 \times 8}{2} = 194.$$

$$\boxed{\text{Respuesta. } 194 \text{ (Opción: D.)}}$$

Olimpiada Paceña de Matemática
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: `opmatumsa@fcpn.edu.bo`
`http://opmat.fcpn.edu.bo/`