Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática
Olimpiada Paceña de Matemática

Fase Final: problemas y soluciones

Categoría gama: 5to y 6to de secundaria

Problema 1. Decida si la expresión

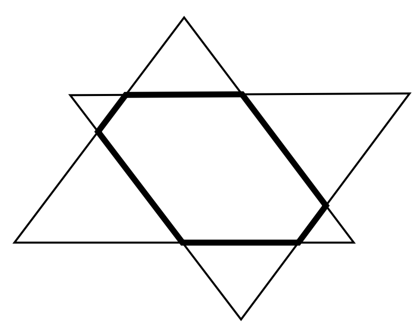
$$4^{2024} + 3^{2024} - 2^{2024} - 1^{2024}$$

es o no un múltiplo de 5. Justifique su respuesta.

Problema 2. En un salón de clases con 20 estudiantes, cada niño elabora una lista con los nombres de las niñas que le gustan para el Día de San Valentín (esta lista puede estar vacía). La única restricción es que no pueden existir tres o más listas con la misma cantidad de nombres. Determine el número mínimo de niñas que debe haber en el salón para que se cumpla esta restricción.

Problema 3. La suma de cinco enteros consecutivos es 10^{2024}, ¿cuál es el número intermedio?

Problema 4. Dos triángulos equiláteros iguales con perímetro de 18 cm se traslapan de manera que sus lados quedan paralelos como indica la figura. ¿Cuál es el perímetro del hexágono que queda formado adentro de la figura?



Problema 5. Los números a, b, c son raíces de la ecuación $x^3 - 3x - 1 = 0$. Hallar el valor de $a^9 + b^9 + c^9$.

Soluciones

Solución (Del problema 1.) Calculemos el dígito de las unidades de la expresión dada para verificar si es divisible por 5. Para esto, determinamos el dígito de las unidades de cada término de la expresión $4^{2024} + 3^{2024} - 2^{2024} - 1^{2024}$:

- Para 4^{2024}, notamos que los dígitos de las unidades de las potencias de 4 siguen un patrón cíclico:

$$4^1 = 4, \quad 4^2 = 16, \quad 4^3 = 64, \quad 4^4 = 256, \quad \ldots$$

  Observamos que el dígito de las unidades es 4 si el exponente es impar y 6 si es par. En particular, dado que 2024 es par, el dígito de las unidades de 4^{2024} es 6.
- Para 3^{2024}, notamos que los dígitos de las unidades de las potencias de 3 también siguen un patrón cíclico:

$$3^1 = 3, \quad 3^2 = 9, \quad 3^3 = 27, \quad 3^4 = 81, \quad \ldots$$

  El ciclo de los dígitos de las unidades es $3, 9, 7, 1$. Como $2024 \equiv 0 \pmod 4$, el dígito de las unidades de 3^{2024} es 1.
- Para 2^{2024}, los dígitos de las unidades de las potencias de 2 siguen el patrón:

$$2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \quad \ldots$$

  El ciclo de los dígitos de las unidades es $2, 4, 8, 6$. Como $2024 \equiv 0 \pmod 4$, el dígito de las unidades de 2^{2024} es 6.
- Finalmente, para 1^{2024}, dado que cualquier potencia de 1 es 1, el dígito de las unidades es 1.

Por lo tanto, el dígito de las unidades de la expresión $4^{2024} + 3^{2024} - 2^{2024} - 1^{2024}$ es $6 + 1 - 6 - 1 = 0$. Esto muestra que la expresión es divisible por 5.

$$\boxed{\text{Respuesta. Sí}}$$

Solución (Del problema 2.) Sea d el número de niñas en la clase. Según el enunciado del problema, no pueden existir tres niños con el mismo número de niñas en sus listas de preferencias. Esto implica que, como máximo, pueden haber dos listas con 0 niñas (listas vacías), dos listas con 1 niña, dos listas con 2 niñas, y así sucesivamente, hasta dos listas con d niñas. Por lo tanto, el número total de listados de niños, que coincide con el número de niños en la clase, no puede ser mayor que $2(d+1)$. Este límite se obtiene considerando que $d+1$ abarca todos los casos posibles, desde ninguna niña (0 niñas) hasta d niñas. Dado que el número total de niños en la clase es 20, debemos tener:

$$20 \leq 2(d+1) + d = 3d + 2;$$

resolviendo la desigualdad, obtenemos $d \leq 6$. Es fácil verificar que si hay exactamente 6 niñas y 14 niños, la condición del problema se cumple. Podemos asignar los listados de la siguiente manera: dos niños con listas vacías, dos con una niña en su lista, dos con dos niñas, y así sucesivamente, hasta llegar a los dos últimos niños, que tendrían a las 6 niñas en su lista. De este modo, se generan exactamente 14 listados distintos, uno por cada niño, y se garantiza que no existan tres niños con el mismo número de niñas en sus listas. Por lo tanto, concluimos que la cantidad mínima de niñas en la clase es 6.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 6}$$

Solución (Del problema 3.) Denotemos por x al entero positivo buscado. De acuerdo a las condiciones del problema, la suma de los enteros consecutivos

$$x-2, \qquad x-1, \qquad x, \qquad x+1, \qquad x+2,$$

es igual a 10^{2024}. Se sigue que

$$5 \times x = 10^{2024},$$

por lo tanto, $x = 2 \times 10^{2023}$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 2 \times 10^{2023}}$$

Solución (Del problema 4.) Dado que los lados correspondientes de los triángulos son paralelos, los ángulos en los vértices de intersección de los triángulos son de $60°$. Esto implica que cada uno de estos vértices forma un triángulo equilátero. Por lo tanto, la suma de tres lados consecutivos del hexágono es igual a la longitud de un lado del triángulo equilátero, es decir, 6 cm. De esto se deduce que el perímetro del hexágono es 12 cm.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 12 \text{ cm}}$$

Solución (Del problema 5.) Usando las relaciones de Vieta para la ecuación cúbica $x^3 - 3x - 1 = 0$, tenemos:

- $a + b + c = 0$,
- $ab + ac + bc = -3$,
- $abc = 1$.

De estas relaciones, se tiene que

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac) = 6,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (3a + 1) + (3b + 1) + (3c + 1) = 3(a + b + c) + 3 = 3.$$

Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned} a^9 + b^9 + c^9 &= (3a + 1)^3 + (3b + 1)^3 + (3c + 1)^2 \\ &= 27(a^3 + b^3 + c^3) + 27(a^2 + b^2 + c^2) + 9(a + b + c) + 3 \\ &= 27(3) + 27(6) + 9(0) + 3 \\ &= 246. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta. } 246}$

Olimpiada Paceña de Matemática
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: `opmatumsa@fcpn.edu.bo`
`http://opmat.fcpn.edu.bo/`