Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática
Olimpiada Paceña de Matemática

γ

Segunda Fase: problemas y soluciones

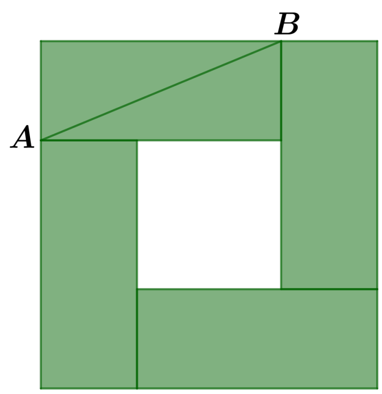
Categoría gamma: 5to y 6to de secundaria

Parte 1: Problemas de selección múltiple

Problema 1. Un poliedro tiene 20 caras hexagonales y 12 caras pentagonales. ¿Cuántas aristas tiene dicho poliedro?

(A) 87 (B) 88 (C) 89 (D) 90 (E) 91

Problema 2. Un cuadrado grande se compone de: cuatro rectángulos idénticos y un cuadrado pequeño, como se muestra en la siguiente figura.



El área del cuadrado grande es 49 cm^2 y la longitud de la diagonal AB, de uno de los rectángulos, es 5 cm. ¿Cuál es el área del cuadrado pequeño?

(A) 1 cm^2 (B) 4 cm^2 (C) 9 cm^2 (D) 16 cm^2 (E) 25 cm^2

Problema 3. ¿Cuál de los números siguientes no puede escribirse en la forma

$$(x^2+1)+\sqrt{x^2+1},$$

para algún x número entero?

(A) 756 (B) 552 (C) 306 (D) 224 (E) 156

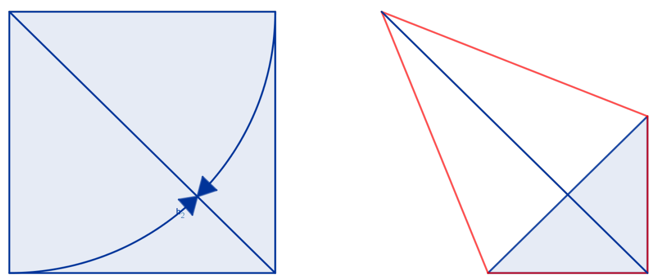
Problema 4. La secuencia S_n está definida de la siguiente manera: $S_1 = 1$, $S_2 = 2$ y para $n \geq 2$, se cumple la relación

$$S_n = S_{n-1} \cdot S_{n+1}.$$

¿Cuántos de los primeros 2024 términos de esta secuencia son números pares?

(A) 1012 (B) 673 (C) 506 (D) 505 (E) 675

Problema 5. Lucy tomó una hoja de papel cuadrada de lado igual a 1; hizo dos dobleces llevando dos lados consecutivos de la hoja a la diagonal obteniendo un cuadrilátero de contorno resaltado como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del cuadrilátero obtenido?



(A) $\frac{7}{10}$ (B) $2 - \sqrt{2}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\sqrt{2} - 1$ (E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

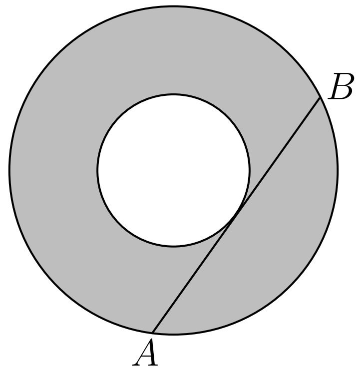
Parte 2: Preguntas de respuesta corta numérica

Problema 6. En el mercado del domingo por la mañana, Ana decidió comprar tres tipos de frutas de entre 12 variedades disponibles, y un tipo de verdura de entre seis opciones. Por la tarde, después de que algunos productos se agotaron, Bertha quiso comprar dos tipos de frutas y dos tipos de verduras de los productos restantes. Si el número de combinaciones posibles para Bertha fue una cuarta parte del número de combinaciones posibles para Ana, ¿cuántos productos se agotaron por la tarde?

Problema 7. ¿Cuántos enteros positivos n tienen la siguiente propiedad: entre los divisores positivos de n, distintos de 1 y n, el mayor es 21 veces el más pequeño?

Problema 8. El residuo de la división de 1001 por un número de un dígito es 5. ¿Cuál es el residuo de la división del número 2024 por el mismo dígito?

Problema 9. En la siguiente figura los dos círculos tienen el mismo centro y la cuerda AB mide $\frac{14}{\sqrt{\pi}}$, ¿cuál es el área de la región sombreada?



Problema 10. En una maratón corrieron Rodrigo y David. Al final de la carrera se dieron cuenta de que David terminó adelante del doble de personas que terminaron antes que Rodrigo. También notaron que Rodrigo terminó antes que 1,5 veces el número de corredores que terminaron antes que David. Si David terminó el maratón en la posición número 21, ¿cuántos corredores participaron del maratón?

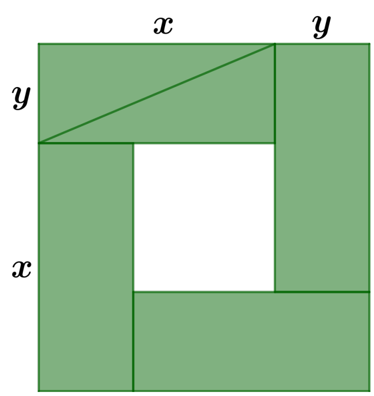
Soluciones

Parte 1: Soluciones a los problemas de selección múltiple

Solución (Del problema 1.) Para efectuar el conteo, note que cada hexagóno contiene en su borde a 6 aristas y que cada pentagóno contiene en su borde a 5 aristas; por tanto, la cantidad de aristas que contienen 20 caras hexagonales y 12 caras pentagonales sería $20 \times 6 + 12 \times 5 = 180$. Por otro lado, en el conteo anterior, cada arista del poliedro es contada exactamente dos veces, así, el número de aristas en el poliedro es 90.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 90 \text{ (Opción: D.)}}$$

Solución (Del problema 2.) Denotemos por x e y, los lados de los rectángulos idénticos, con $x > y$, como se indica en la siguiente figura.



Con estos datos, la medida del lado del cuadrado grande es $x+y$ y la medida del lado del cuadrado pequeño es $x-y$; se sigue que, el área del cuadrado grande $(x+y)^2 = 49$ cm^2. Como la diagonal de cada rectángulo mide 5 cm, por el teorema de Pitágoras tenemos $x^2+y^2 = 25$, por tanto, $xy = 12$. Así, el área del cuadrado pequeño es $(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy = 25-(2\times 12) = 1$ cm^2.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 1 \text{ cm}^2 \text{ (Opción: A.)}}$$

Solución (Del problema 3.) Sea a cualquiera de los números en las opciones. Note que $a-(x^2+1) = \sqrt{x^2+1}$ debe ser un número entero. Por lo tanto,

$$a = \sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right),$$

es decir, a es el producto de dos enteros consecutivos. Ya que $756 = 27 \cdot 28$, $552 = 23 \cdot 24$, $306 = 17 \cdot 18$ y $156 = 12 \cdot 13$; queda el número 224 que no es el producto de dos enteros consecutivos como puede comprobarse fácilmente.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 224 \text{ (Opción: D.)}}$$

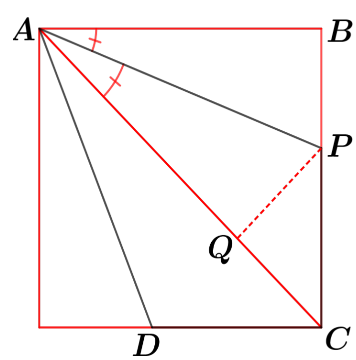
Solución (Del problema 4.) La relación de recurrencia $S_n = S_{n-1} \cdot S_{n+1}$ puede expresarse como $S_{n+1} = S_n / S_{n-1}$. Ya que $S_1 = 1$ y $S_2 = 2$, podemos calcular los primeros términos de la secuencia:

$$S_3 = 2, \quad S_4 = 1, \quad S_5 = \frac{1}{2}, \quad S_6 = \frac{1}{2}, \quad S_7 = 1 \quad \text{y} \quad S_8 = 2.$$

Así, la secuencia $S_n : 1, 2, 2, 1, 1/2, 1/2, 1, 2, \ldots$ repite sus primeros seis términos. Ya que $2024 = 337 \times 6 + 2$, por cada bloque de seis términos podemos contar dos números pares, estos hacen un total de $337 \times 2 = 674$; al final de los bloques, nos quedan dos términos, a saber: 1 y 2, por tanto, entre los primeros 2024 términos de la secuencia S_n hay un total de 675 números pares.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 675 \text{ (Opción: E.)}}$$

Solución (Del problema 5.) Consideremos un cuadrado de lado 1, marquemos los puntos A, B y C como en la siguiente figura.



Al doblar el cuadrado, llevamos el lado AB sobre la diagonal AC en donde el punto B queda marcado sobre el punto Q de la diagonal. Notemos que los triángulos ABP y AQP son congruentes, así, QP es perpendicular a AC. En el triángulo APC, al considerar a $AC = \sqrt{2}$ como base y a PQ como la altura, su área es igual a $(\sqrt{2} \times PQ)/2$; por otro lado, si tomamos a PC como base y AB como su altura, ya que $PC = 1 - BP = 1 - PQ$ y $AB = 1$, su área es igual a $(1 - PQ) \times 1/2$. Igualando ambas expresiones del área del triángulo APC, tenemos la ecuación $\sqrt{2} \times PQ = 1 - PQ$, de donde se obtiene que $PQ = \sqrt{2} - 1$. Finalmente, el área del cuadrilátero $APCD$ es igual al doble del área del triángulo APC, es decir, es igual a $2 - \sqrt{2}$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 2 - \sqrt{2} \text{ (Opción: B.)}}$$

Parte 2: Soluciones a los problemas de respuesta corta

Solución (Del problema 6.) Ana tenia $\binom{12}{3}$ posibles elecciones de fruta y $\binom{6}{1}$ posibles elecciones de verdura, por el principio del producto en total Ana tendría $\binom{12}{3} \times \binom{6}{1} = 10 \times 11 \times 12$ posibles elecciones de compra. Si denotamos por x e y, el número de tipos de fruta y verdura agotados respectivamente, entonces Bertha tiene un total de $\binom{12-x}{2} \times \binom{6-y}{2} = \frac{(12-x)\times(11-x)\times(6-y)\times(5-y)}{4}$, posibles opciones de compra. Sabiendo que el número de posibles elecciones para Bertha era la cuarta parte del número de posibles elecciones para Ana, tenemos la ecuación

$$(12 - x) \times (11 - x) \times (6 - y) \times (5 - y) = 10 \cdot 11 \cdot 12;$$

ya que $0 < x < 11$ y $0 < y < 5$, necesariamente $x = 1$ y $y = 2$, es decir, tres productos estaban agotados.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 3}$$

Solución (Del problema 7.) Cuando quitamos los divisores positivos 1 y n, el producto del divisor menor, llamado a, por el divisor mayor, llamado b, satisfacen $a \cdot b = n$. Por otro lado, de acuerdo a la condición del problema, $b = 21 \cdot a$, por tanto, $n = 21a^2$. Se sigue que 3 divide a n, luego los posibles valores para a son 2 o 3. De aquí se deduce que sólo existen dos enteros positivos que satifacen la propiedad, a saber $n = 84$ o $n = 189$.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 2}$$

Solución (Del problema 8.) Ya que $1001 - 5 = 996 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 83$. El número de un dígito debe ser mayor que 5 y algunos de sus factores son: $2, 2$ o 3; la única posibilidad es $2 \cdot 3 = 6$. Al dividir 2024 entre 6 vemos que el residuo es 2.

$$\boxed{\text{Respuesta. } 2}$$

Solución (Del problema 9.) Llamando R al radio del círculo mayor y r al radio del círculo menor, por el teorema de Pitágoras tenemos que $R^2 = r^2 + (7/\sqrt{\pi})^2$, por tanto, $R^2 - r^2 = 49/\pi$. Se sigue que, el área de la región sombreada es igual a $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = 49$.

$\boxed{\text{Respuesta. 49}}$

Solución (Del problema 10.) Llegaron 20 corredores antes que David, así que llegaron 30 corredores después de Rodrigo. Llamemos x a la cantidad de corredores que llegaron antes que Rodrigo. Tenemos que $2x + 20 = 30 + x$, de donde $x = 10$. En total hubo $10 + 1 + 30 = 41$ corredores en el maratón.

$\boxed{\text{Respuesta. 41}}$

Olimpiada Paceña de Matemática
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: `opmatumsa@fcpn.edu.bo`
`http://opmat.fcpn.edu.bo/`