22^{a} OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA
Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS

PRIMERA FASE

Prueba de clasificación

PREGUNTAS Y SOLUCIONES

Jimmy Santamaria, Hernan Laime

CATEGORÍA α

1^{ro} Y 2^{do} DE SECUNDARIA

Junio, 2025

Preguntas

Tiempo estimado: 50 min

Problema 1. Mira la siguiente expresión $*1*2*3*4*5*6$. Cada símbolo $*$ puede ser reemplazado por el signo más $(+)$ o por el signo menos $(-)$. Incluso el primer símbolo, que está delante del número 1, debe ser reemplazado. Por ejemplo, una posible expresión es $+1+2+3-4+5+6=13$. Probando diferentes combinaciones de signos, se pueden obtener varios resultados. Sin embargo, uno de los siguientes números no se puede obtener de ninguna forma. ¿Cuál es ese número?

(A) 7 (B) -19 (C) 13 (D) 19 (E) 23

Problema 2. Patricia quiere formar el número más pequeño posible de 12 dígitos, usando una vez cada una de las 7 piezas que se muestran a continuación:

$\boxed{4}$ $\boxed{69}$ $\boxed{113}$ $\boxed{9}$ $\boxed{51}$ $\boxed{5}$ $\boxed{67}$

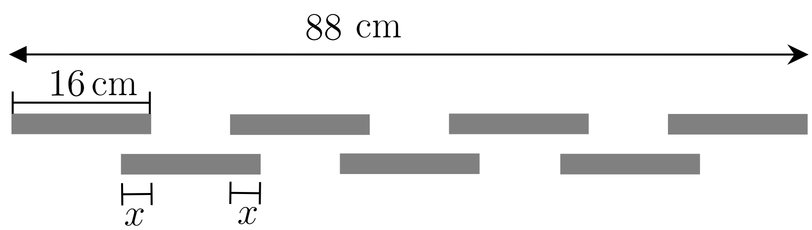
¿Cuáles son los últimos tres dígitos de ese número, leyendo de izquierda a derecha?

(A) 113 (B) 459 (C) 515 (D) 699 (E) 967

Problema 3. En la figura se muestran 7 barras iguales, cada una de 16 cm de largo, colocadas en dos filas alternadas. La distancia entre una barra y la siguiente en cada fila es siempre la misma.

Todas las barras de la fila superior se superponen parcialmente con una o dos barras de la fila inferior. Las superposiciones que se muestran en la figura miden x, y todas tienen la misma medida.

Si la disposición completa de las barras mide 88 cm de largo, ¿cuánto vale x en cm?

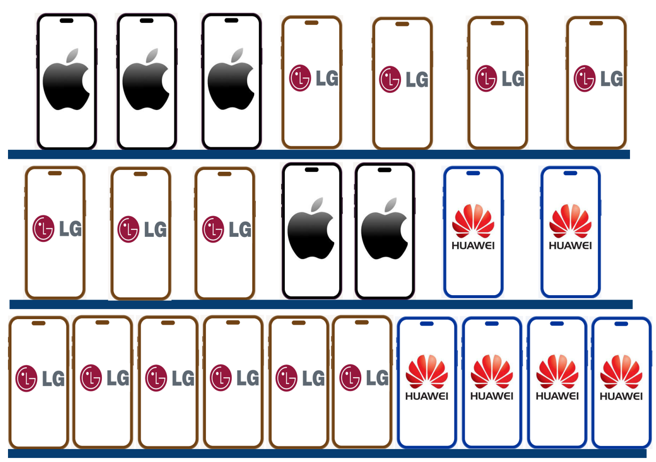


(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Problema 4. Luisa, Bruno, Carla, Diego, Elena y Fabio, recibieron al azar una tarjeta numerada del 1 al 6, sin repetir. Se sabe que el número de la tarjeta de Luisa es el doble del de Bruno y tres veces el de Carla. Además, el número de la tarjeta de Diego es cuatro veces el de Elena. ¿Qué número le tocó a Fabio?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Problema 5. En una tienda de celulares se exhiben tres marcas distintas: , HUAWEI y LG. En el estante mostrado, cada fila tiene un valor total de 6400 Bs. Todos los celulares de una misma marca tienen el mismo precio. ¿Cuánto cuesta un celular de la marca LG?



(A) 400 (B) 800 (C) 900 (D) 1000 (E) 1100

Problema 6. Cuatro jóvenes —Laura, Brenda, Carla y Daniela— practican cada una un deporte diferente entre karate, fútbol, voleibol y judo. Se sabe que:

- A Laura no le agradan los deportes que utilizan pelota.
- Brenda practica judo y suele observar a una de las otras tres jugar fútbol.

Solo una de las siguientes afirmaciones es verdadera. ¿Cuál es?

(A) Laura practica voleibol

(B) Brenda practica fútbol

(C) Carla practica voleibol

(D) Daniela practica karate

(E) Laura practica judo

Problema 7. Cuando multiplicamos los números del 1 al 5, obtenemos:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120,$$

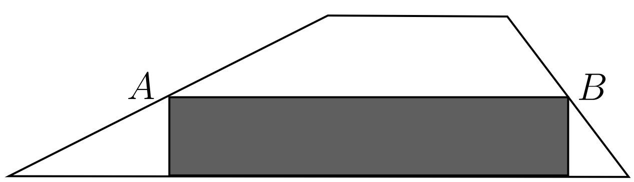
y ese número termina en un cero.
Ahora queremos hacer lo mismo, pero multiplicando todos los números del 1 al 100:

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 99 \times 100.$$

¿En cuántos ceros termina este número?

(A) 25 (B) 24 (C) 23 (D) 20 (E) 15

Problema 8. El rectángulo sombreado tiene área 15cm^2; A y B son los puntos medios de dos de los lados del trapezoide, como se indica en la figura. ¿Cuál es el área del trapezoide?

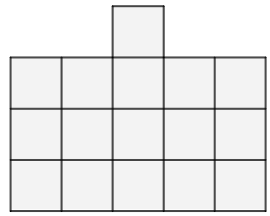


(A) 22 cm^2 (B) 30 cm^2 (C) 24 cm^2 (D) 25 cm^2 (E) 26 cm^2

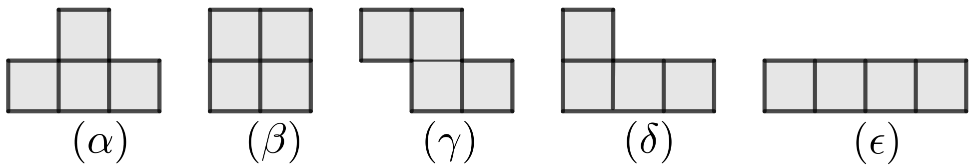
Problema 9. En una escuela estudian 1200 alumnos. Cada estudiante asiste a 5 clases todos los días. Cada maestro da exactamente 4 clases por día, y cada clase es recibida por exactamente 30 estudiantes. ¿Cuántos maestros trabajan en la escuela?

(A) 24 (B) 50 (C) 84 (D) 92 (E) 100

Problema 10. Un día, Sofía creó una figura especial:



Para construirla, usó exactamente cuatro piezas iguales, elegidas de entre las siguientes opciones:



Puedes girar y voltear las piezas. ¿Puedes descubrir exactamente cuál o cuáles de esas piezas permiten construir la figura de Sofía?
Nota. Solo puedes usar un tipo de pieza, repetida cuatro veces.

(A) α y δ (B) β y ϵ (C) α (D) β y γ (E) ϵ

Soluciones

Solución del Problema 1. En esta expresión $*1*2*3*4*5*6$ cada asterisco puede ser reemplazado por un signo $+$ o $-$. El valor máximo que se puede obtener es cuando todos los signos son positivos:

$$+1+2+3+4+5+6 = 1+2+3+4+5+6 = 21.$$

Por lo tanto, no es posible obtener un número mayor que 21 usando solo $+$ y $-$ entre los números del 1 al 6. Entre las opciones, veamos cuáles sí se pueden obtener:

$$\begin{aligned} 7 &= +1+2-3-4+5+6 \\ -19 &= +1-2-3-4-5-6 \\ 13 &= -1+2-3+4+5+6 \\ 19 &= -1+2+3+4+5+6 \end{aligned}$$

Sin embargo, el número 23 no se puede obtener, ya que es mayor que 21, que es el mayor resultado posible.

$$\boxed{\text{Respuesta: (E) 23}}$$

Solución del Problema 2.

Queremos formar el número más pequeño posible de 12 dígitos, usando todas las siguientes piezas una sola vez:

$$\boxed{4} \quad \boxed{69} \quad \boxed{113} \quad \boxed{9} \quad \boxed{51} \quad \boxed{5} \quad \boxed{67}$$

La idea es ordenar las piezas de forma que, al escribirlas una junto a otra, se obtenga el número más pequeño posible. Para eso, conviene empezar por la pieza que comienza con el dígito más pequeño, y continuar con la mejor opción disponible en cada paso.

Comenzamos con $\boxed{113}$, porque es la única pieza que empieza con el dígito 1.

Luego, entre las piezas restantes, la que empieza con el dígito más pequeño es $\boxed{4}$, así que esa va en segundo lugar.

Ahora nos quedan estas piezas: $\boxed{5}$, $\boxed{51}$, $\boxed{67}$, $\boxed{69}$, $\boxed{9}$. Podríamos pensar que $\boxed{5}$ es la mejor opción porque empieza con el menor dígito. Pero si colocamos $\boxed{5}$ en este momento, la siguiente pieza más pequeña que queda es $\boxed{51}$. En ese caso, se escribiría 5 seguido de 51, lo que da 551. En cambio, si usamos primero $\boxed{51}$ y luego $\boxed{5}$, se escribe 51 seguido de 5, que da 515. Ese número es más pequeño que 551. Por eso, aunque $\boxed{5}$ empieza con un dígito menor, en este caso conviene usar primero $\boxed{51}$ y después $\boxed{5}$.

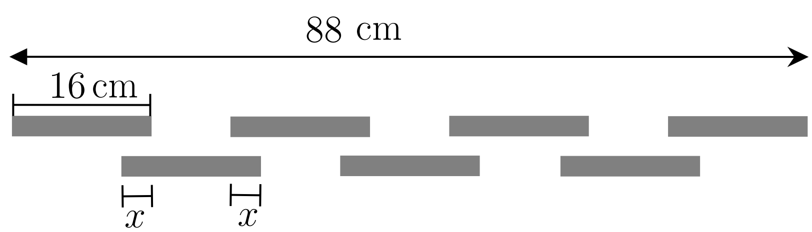
Ahora solo quedan las piezas que comienzan con 6 o 9: $\boxed{67}$, $\boxed{69}$, $\boxed{9}$. Como $67 < 69$, usamos primero $\boxed{67}$, luego $\boxed{69}$, y por último $\boxed{9}$.

Entonces, el orden correcto es: $\boxed{113}$ $\boxed{4}$ $\boxed{51}$ $\boxed{5}$ $\boxed{67}$ $\boxed{69}$ $\boxed{9}$

Esto forma el número:113451567699. Los últimos tres dígitos son: 699.

$$\boxed{\text{Respuesta: (D) 699}}$$

Solución del Problema 3. Recordemos la figura del problema



Solución 1. En la línea superior, hay 4 barras y 3 espacios entre ellas, la longitud total es de 88 cm. Como cada barra mide tenemos 16 cm el total de espacio que ocupan estas cuatro barras es de $16 \times 4 = 64$ cm, de aquí obtenemos que $88 - 64 = 24$ cm y como hay tres espacios en la parte superior obtenemos $24/3 = 8$, es decir cada espacio en la parte superior es de 8 cm, así el valor de x es $(16 - 8)/2 = 4$ cm.

Solución 2. Cada barra mide 16 cm y hay 7 barras en total. Por lo tanto, la longitud total si no hubiera superposición sería: $7 \times 16 = 112$ cm.

La diferencia entre esa longitud y la longitud real de la figura es: $112 - 88 = 24$ cm, que corresponde a 6 tramos de longitud x. Por lo tanto: $6x = 24$, de donde $x = 4$.

$$\boxed{\text{Respuesta: (D) 4}}$$

Solución del Problema 4.

Solución 1. El número de Luisa debe ser múltiplo de 2 y de 3, por lo que solo puede ser 6. Esto implica que Bruno tiene el 3 (ya que $6 = 2 \times 3$) y Carla el 2 (porque $6 = 3 \times 2$). El número de Diego debe ser el único divisible por 4 entre los restantes, que es el 4, por lo que Elena tiene el 1 ($4 = 4 \times 1$). Las tarjetas asignadas son: Luisa (6), Bruno (3), Carla (2), Diego (4), Elena (1). El número restante es el 5, que le corresponde a Fabio.

Solución 2. Del 1 al 6, sólo existe una pareja de números en la que uno sea el cuádruple del otro: 1 y 4. Por lo tanto, a Elena le tocó el 1 y a Diego el 4.
También, del 1 al 6, sólo existe una pareja de números en la que uno sea el triple del otro: 2 y 6. Así que a Carla le tocó el 2 y a Luisa el 6.
Además, como el número de Luisa es también el doble del número de Bruno, se cumple que 3 es la tarjeta de Bruno (ya que $6 = 2 \times 3$).
Hasta ahora se han asignado los números 1, 2, 3, 4 y 6. El único número que queda sin asignar es el 5. Por lo tanto, a Fabio le tocó el número 5.

$$\boxed{\text{Respuesta: (D) 5}}$$

Solución del Problema 5. Recordemos el estante de la tienda:

Solución 1. Sean a, b y c los precios de los celulares de las marcas de los celulares , HUAWEI y LG respectivamente. Observando el estante, obtenemos tres ecuaciones:

$$3a + 4c = 6400 \tag{1}$$
$$3c + 2a + 2b = 6400 \tag{2}$$
$$6c + 4b = 6400. \tag{3}$$

Sacando mitad a la ecuación (3) y restándola de la ecuación (2), obtenemos: $3c + 2a + 2b - (3c + 2b) = 6400 - 3200$ así $a = 1600$. Reemplazando este resultado en (1) tenemos que $3(1600) + 4c = 6400$ de aquí $4800 + 4c = 6400$ luego $c = 400$. En conclusión, el celular de la marca LG vale 400 Bs.

Solución 2. Denotemos por A el valor de celular Apple, por H el valor de un celular Huawey y por L el valor de una celular LG. La segunda y tercera fila significan respectivamente que

$$L + L + L + A + A + H + H = 6400,$$
$$L + L + L + L + L + L + H + H + H + H = 6400.$$

Si duplicamos la cantidad de celulares de la segunda línea obtendríamos

$$L + L + L + L + L + L + A + A + A + A + H + H + H + H = 12800.$$

De donde, usando la información de la tercera fila tenemos

$$6400 + A + A + A + A = 12800,$$

por tanto $A + A + A + A = 6400$, así $A = 1600$. La primera fila significa que

$$1600 + 1600 + 1600 + L + L + L + L = 6400,$$

es decir $L + L + L + L = 1600$, por tanto $L = 400$.

$$\boxed{\text{Respuesta: (A) 400}}$$

Solución del Problema 6. Como a Laura no le agradan los deportes que utilizan pelota, no puede practicar ni fútbol ni voleibol. Además, como Brenda ya practica judo, el único deporte que queda para Laura es karate.

Entonces, la opción (A) es falsa porque Laura no puede practicar voleibol; (B) es falsa porque Brenda no hace fútbol; (D) es falsa porque Daniela no puede hacer karate, ya que lo hace Laura; y (E) es falsa porque Laura no hace judo, ya lo hace Brenda.

Solo queda (C): Carla practica voleibol, y esta afirmación no genera ninguna contradicción.

$$\boxed{\text{Respuesta: (C) Carla practica voleibol}}$$

Solución del Problema 7.

Cada vez que en una multiplicación aparece un factor 2 junto con un factor 5, se forma un 10, lo que produce un cero al final del número.

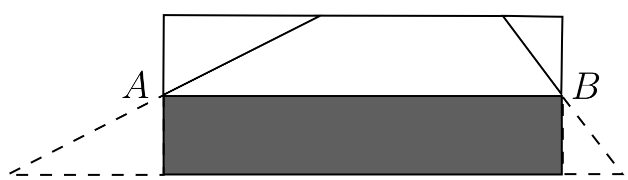
En la multiplicación $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 100$ hay muchos factores 2 (por todos los números pares), así que seguro sobran. Lo que nos interesa es contar cuántos factores 5 aparecen.

Contemos cuántos números entre 1 y 100 son divisibles por 5: $5,\ 10,\ 15,\ \ldots,\ 100$, que son 20 números.

Pero algunos de esos aportan más de un 5, como: $25,\ 50,\ 75,\ 100$, cada uno aporta un 5 extra. Entonces tenemos 4 factores 5 más. En total: $20 + 4 = 24$ factores 5. Notemos que en estos números no hay uno que aporte con 3 factores 5, el menor de estos números es 125.
Por lo tanto, hay 24 pares 2×5, lo que significa que el número termina en 24 ceros.

$$\boxed{\text{Respuesta: (B) 24}}$$

Solución del Problema 8. Si reacomodamos (o trasladamos) los triángulos que están a los lados del rectángulo sombreado y los colocamos en la parte superior, podemos formar un rectángulo completo. El área de este nuevo rectángulo es el doble del área del rectángulo sombreado. Como el área del rectángulo sombreado es $2 \times 15 = 30$ cm^2.



$$\boxed{\text{Respuesta: (B) } 30 \text{ cm}^2}$$

Solución del Problema 9.
Cada estudiante asiste a 5 clases por día y hay 1200 estudiantes, por lo tanto, el número total de asistencias a clases por día es:

$$1200 \times 5 = 6000.$$

Como cada clase es recibida por exactamente 30 estudiantes, el número total de clases distintas que se dictan por día es:

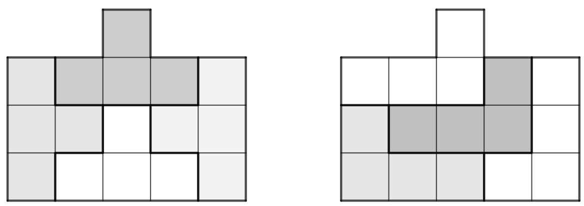
$$\frac{6000}{30} = 200.$$

Cada maestro dicta exactamente 4 clases por día, entonces el número total de maestros necesarios es:

$$\frac{200}{4} = 50.$$

$$\boxed{\text{Respuesta: (B) 50}}$$

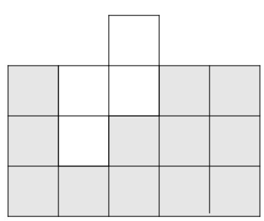
Solución del Problema 10. Las piezas α y δ son adecuadas, y en la figura se ilustran ejemplos de cómo pueden disponerse las piezas para formar la figura.



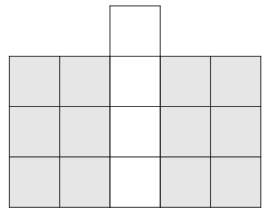
Vamos a demostrar que no se puede armar la figura grande usando solamente piezas de los tipos β, γ y ϵ.

Opción β: Esta pieza es un cuadrado de 2×2. o sea, de cuatro casillas que forman un cuadrado. La casilla que está más arriba en la figura especial de Sofía no puede ser cubierta con esta pieza, porque está sola y no hay forma de colocar el cuadrado sin que se salga de la figura.

Opción γ): Esta pieza puede colocarse de dos maneras para cubrir la casilla de arriba (porque es simétrica). Supongamos que la ponemos como en el dibujo. Entonces, a la izquierda quedan dos casillas una al lado de la otra, y no hay forma de cubrirlas con esta pieza sin que sobre espacio o se salga de la figura especial de Sofía.



Opción (ϵ): Esta figura es un rectángulo largo de 1×4, es decir, cuatro casillas seguidas en una línea recta. Si tratamos de cubrir la casilla de arriba con esta pieza, tendría que ponerse de forma vertical. Pero si hacemos eso, las casillas que quedan no pueden cubrirse completamente con piezas iguales, porque no encajan bien en el resto de la figura.



$\boxed{\text{Respuesta: (A) } \alpha \text{ y } \delta}$

Olimpiada Paceña de Matemática

Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,

Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,

e-mail: `opmatumsa@fcpn.edu.bo`

`http://opmat.fcpn.edu.bo/`