22^a Olimpiada Paceña de Matemática

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Universidad Mayor de San Andrés

PRIMERA FASE

Prueba de clasificación

PREGUNTAS Y SOLUCIONES

Charlie Lozano, Carlos Pozo, Fernando Vera

Categoría β

3^{ro} y 4^{to} de Secundaria

Junio, 2025

Preguntas

Tiempo estimado: 70 min

Problema 1. Hoy es el cumpleaños de Armando. Se sabe que el cuadrado de su edad (en años) es 32 unidades menor que el número de meses que tiene. ¿Cuál es la suma de las posibles edades de Armando?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 14

Problema 2. ¿Cuál es el valor de la expresión

$$\left(\frac{2^2}{1+3}-\frac{4^2}{3+5}\right)+\left(\frac{6^2}{5+7}-\frac{8^2}{7+9}\right)+\cdots+\left(\frac{98^2}{97+99}-\frac{100^2}{99+101}\right)?$$

(A) -100 (B) -50 (C) -25 (D) -10 (E) -5

Problema 3. Sean a y b enteros positivos. Si a es divisible por 2 pero no por 3, y b es divisible por 3 pero no por 2, ¿cuál es el mayor valor de tres cifras que puede tomar $a+b$?

(A) 995 (B) 996 (C) 997 (D) 998 (E) 999

Problema 4. Sea n un entero positivo menor que 2025. Se sabe que si se rota un hexágono regular n grados en el sentido de las agujas del reloj alrededor de su centro, el hexágono resultante coincide con el hexágono original. ¿Cuántos valores posibles puede tomar n?

(A) 8 (B) 16 (C) 17 (D) 32 (E) 33

Problema 5. En la carrera de matemática hay cuatro clases, una en cada uno de los cuatro pisos del edificio. Para cada clase, la clase que está un piso arriba tiene el doble de estudiantes y la mitad de la calificación promedio de esa clase. Si la calificación promedio combinada de las cuatro clases es 20, ¿cuál es la calificación promedio de la clase del piso inferior?

(A) 75 (B) 80 (C) 85 (D) 90 (E) 95

Problema 6. Uroans, el rey del planeta Sauron, inventó un nuevo idioma para su pueblo. El alfabeto tiene solo seis letras: A, N, O, R, S y U; sin embargo, el orden alfabético es diferente al del español. Una palabra es cualquier secuencia de seis letras diferentes. En el diccionario de este idioma, la primera palabra es SAURON. ¿Qué palabra sigue inmediatamente después de UROANS?

(A) *URONAS* (B) *URANUS* (C) *SURANU* (D) *NURASU* (E) *URONSA*

Problema 7. En el planeta Vulcano hay ocho volcanes grandes y seis pequeños. Los volcanes grandes entran en erupción cada tres años y los pequeños cada dos. En los últimos cinco años, hubo 30 erupciones. ¿Cuántos volcanes podrían entrar en erupción este año?

(A) 8 (B) 6 (C) 4 (D) 2 (E) 1

Problema 8. Había varias rebanadas enteras de queso almacenadas en una despensa. Una noche, unas ratas se colaron y se comieron 10 rebanadas, cada una con una porción igual. Algunas quedaron satisfechas, pero 7 ratas, ávidas, regresaron la noche siguiente para terminar las rebanadas restantes. Sus porciones de la segunda noche resultaron ser la mitad de grandes que las de la primera. ¿Cuántas rebanadas de queso había inicialmente en la despensa?

(A) 11 (B) 15 (C) 20 (D) 21 (E) 13

Problema 9. Ricitos de Oro entra en la casa de los tres osos: Papá Oso, Mamá Osa y Bebé Oso. Cada oso lleva una camiseta de diferente color: roja, verde o azul. Todos los osos le parecen iguales a Ricitos de Oro, así que no puede distinguirlos de otra manera. Los osos con las camisetas roja y azul dicen una afirmación verdadera y una falsa.

- El oso con la camiseta roja dice: *"Soy el papá de Azul. Soy la hija de Verde"*.
- El oso con la camiseta azul dice: *"Rojo y Verde son de sexo opuesto. Rojo y Verde son mis padres"*.

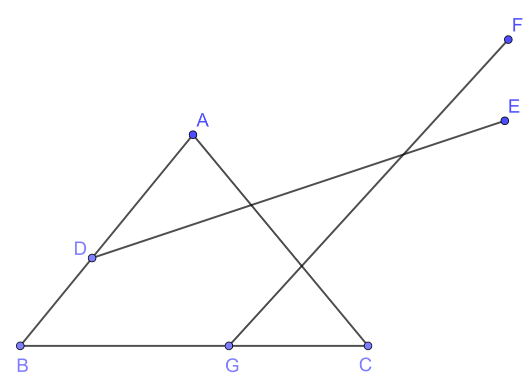
Ayuda a Ricitos de Oro a descubrir qué oso lleva qué camiseta.

(A) Bebé:rojo, Papá:verde, Mamá:azul (B) Bebé:azul, Papá:verde, Mamá:rojo
(C) Bebé:verde, Papá:rojo, Mamá:azul (D) Bebé:rojo, Papá:azul, Mamá:verde
(E) Bebé:azul, Papá:verde, Mamá:rojo

Problema 10. Seis piratas —el capitán Jack y sus cinco tripulantes— se sientan en círculo para repartirse un tesoro de 99 monedas de oro. Jack debe decidir cuántas monedas tomar para sí y cuántas para cada tripulante (no necesariamente la misma cantidad para cada uno). Los cinco tripulantes votarán entonces sobre la decisión de Jack. Cada uno es codicioso y votará *"sí"* solo si obtiene más monedas que cada uno de sus dos vecinos. Si la mayoría vota *"sí"*, se acepta la decisión de Jack. De lo contrario, Jack es arrojado por la borda y no recibe nada. ¿Cuál es la mayor cantidad de monedas que el capitán Jack puede tomar para sí y sobrevivir?

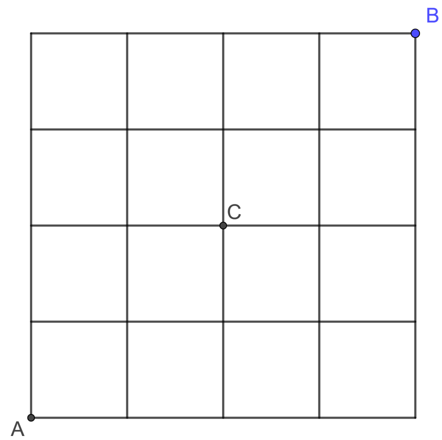
(A) 10 (B) 14 (C) 32 (D) 33 (E) 90

Problema 11. En la figura que se muestra, ABC es un triángulo isósceles, con $AB = AC$ y el ángulo $\angle A = 80$. Las rectas DE y FG forman un ńagulo de 30. Si $\angle BGF = 120$. ¿Cuánto vale el ángulo $\angle ADE$?



(A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 30 (E) 35

Problema 12. En la siguiente figura, cada cuadradito tiene 1cm. de lado.



Un movimiento consiste en avanzar 1cm. hacia arriba o 1cm. hacia la derecha. ¿Cuántos caminos hay para ir de A a B, pasando por el punto C?

(A) 16 (B) 36 (C) 48 (D) 60 (E) 64

Olimpiada Paceña de Matemática
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: opmatumsa@fcpn.edu.bo
http://opmat.fcpn.edu.bo/

Soluciones

Solución del Problema 1. Sea x la edad de Armando en años. Entonces tiene $12x$ meses. Según el enunciado,

$$x^2 = 12x - 32.$$

Llevando todo a un lado:

$$x^2 - 12x + 32 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-4)(x-8) = 0.$$

Por lo tanto, las soluciones son $x = 4$ ó $x = 8$. La suma de las posibles edades es $4 + 8 = 12$.

$$\boxed{\text{Respuesta: (D) } 12}$$

Solución del Problema 2. Observemos que, para todo n, se cumple

$$\frac{n^2}{(n-1)+(n+1)} = \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}.$$

Por tanto, nuestra suma original se convierte en

$$(1-2) + (3-4) + \cdots + (49-50).$$

Cada paréntesis vale -1. Como hay 50 términos en total y agrupamos de dos en dos, obtenemos 25 sumandos, de modo que $25 \times (-1) = -25$.

$$\boxed{\text{Respuesta: (C) } -25}$$

Solución del Problema 3. Buscamos el máximo de tres cifras $S = a + b$ con

$$a \equiv 0 \pmod 2,\ a \not\equiv 0 \pmod 3, \quad b \equiv 0 \pmod 3,\ b \not\equiv 0 \pmod 2.$$

Probamos candidatos de mayor a menor:

- $S = 999$. Como $999 \equiv 0 \pmod 3$ y $b \equiv 0 \pmod 3$, seguiría $a \equiv 0 \pmod 3$, contradicción.
- $S = 998$. Es par, pero a par $+$ b impar daría impar, contradicción.
- $S = 997$. Es impar (coincide con par+impar) y

$$997 \equiv 1 \pmod 3, \quad b \equiv 0 \pmod 3 \implies a \equiv 1 \pmod 3,$$

  válido pues a no es múltiplo de 3.

Por tanto, el mayor valor posible es 997 que se alcanza con $a = 994$ y $b = 3$.

$$\boxed{\text{Respuesta: (C) 997}}$$

Solución del Problema 4. Las 6 vértices del hexágono están equidistantes, por lo que cualquier rotación de un múltiplo de $\frac{360°}{6} = 60°$ devuelve la figura a sí misma. De modo que n debe ser un múltiplo de 60 y $1 \leq n < 2025$.
Para contar cuántos múltiplos de 60 hay menores que 2025, observamos que

$$2025 = 60 \times 33 + 45,$$

luego los múltiplos de 60 estrictamente menores que 2025 son

$$60 \times 1,\ 60 \times 2,\ \ldots,\ 60 \times 33,$$

es decir, 33 valores en total.

$$\boxed{\text{Respuesta: (E) 33}}$$

Solución del Problema 5. Sea n el número de estudiantes de la clase del piso inferior y sea g su calificación promedio. Entonces:

Piso 1 (inferior): n estudiantes, promedio g,

Piso 2: $2n$ estudiantes, promedio $g/2$,

Piso 3: $4n$ estudiantes, promedio $g/4$,

Piso 4 (superior): $8n$ estudiantes, promedio $g/8$.

La calificación promedio combinada es

$$\frac{ng + (2n)\frac{g}{2} + (4n)\frac{g}{4} + (8n)\frac{g}{8}}{n + 2n + 4n + 8n} = \frac{ng + ng + ng + ng}{15n} = \frac{4gn}{15n} = \frac{4g}{15}.$$

Esta media debe ser 20, de modo que

$$\frac{4g}{15} = 20 \quad \Longrightarrow \quad g = 20 \cdot \frac{15}{4} = 75.$$

$$\boxed{\text{Respuesta: (A) 75}}$$

Solución del Problema 6. La siguiente palabra es URONSA.
Como la primera palabra del diccionario es SAURON, el orden alfabético debe ser S, A, U, R, O, N. Es más fácil resolver este problema si reemplazamos las letras por su orden alfabético, de modo que $S = 1, A = 2, U = 3, R = 4, O = 5$ y $N = 6$. Esto significa que la palabra UROANS se convierte en 345261.
Afirmamos que la siguiente palabra en orden alfabético es 345612. La palabra que viene inmediatamente después de 345261 empezará por 3456, porque 345261 es el número más grande que empieza por 3452. Por lo tanto, queremos encontrar el número más pequeño que empieza por 3456. Este número es 345612. Que corresponde a URONSA en el alfabeto de Sauron.

$$\boxed{\text{Respuesta: (E) } URONSA}$$

Solución del Problema 7.

Debe haber 4 erupciones este año.

Numeremos los años del 1 al 5 y digamos que este año es el 6. Como los grandes volcanes entran en erupción cada tres años, cada uno de los ocho volcanes grandes debe entrar en erupción una vez del 1 al 3 y otra del 4 al 6. De igual manera, cada uno de los volcanes pequeños debe entrar en erupción una vez en los años 1 y 2, una vez en los años 3 y 4, y una vez en los años 5 y 6.

Esto significa que el número total de erupciones del 1 al 6 es $2 \times 8 + 3 \times 6 = 34$. Como hubo 30 erupciones en los primeros cinco años, esto deja $34 - 30 = 4$ erupciones en el sexto año.

$$\boxed{\text{Respuesta: (C) 4}}$$

Solución del Problema 8.

Había 11 rebanadas de queso en la despensa.

Sea N el número de rebanadas de queso almacenadas inicialmente en la despensa. Sea R el número de ratas que vinieron la primera noche y sea P el número de rebanadas de queso que cada rata comió la primera noche. Esto nos dice que $10 = R \times P$. En la segunda noche, obtenemos:

$$N - 10 = 7 \times \frac{P}{2}.$$

Combinando estas ecuaciones, tenemos

$$N - 10 = 7 \times \frac{10}{R} \times \frac{1}{2} = \frac{35}{R}.$$

Como $N - 10$ es un número entero, el número de ratas solo puede ser 1, 5, 7 o 35. Pero el problema nos dice que el número total de ratas es estrictamente mayor que 7, por lo que habían 35 ratas. Por lo tanto, había 11 rebanadas de queso.

$$\boxed{\text{Respuesta: (A) 11}}$$

Solución del Problema 9.

El oso de la camisa roja es Bebé Oso; el oso de la camisa verde es Papá Oso; y el oso de la camisa azul es Mamá Osa.

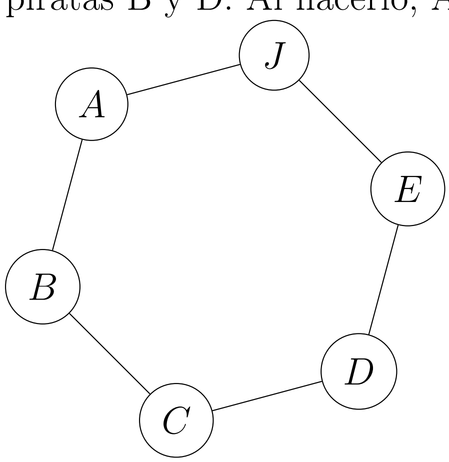
Primero, veamos al oso de la camisa azul. Si la afirmación *"Rojo y Verde son mis padres"* es verdadera, entonces también sería cierto que Rojo y Verde son de géneros opuestos. Por lo tanto, la afirmación *"Rojo y Verde son mis padres"* es falsa (por lo tanto, Azul no es el Bebé Oso), y la afirmación *"Rojo y Verde son de géneros opuestos"* es verdadera.

Ahora podemos hablar del oso de la camisa roja. Ya hemos establecido que Azul no es el bebé, por lo que la afirmación *"Soy el papá de Azul"* debe ser falsa y la afirmación *"Soy la hija de Verde"* es verdadera. Por lo tanto, Rojo es el Bebé Oso y es la hija de Verde. Como Rojo y Verde son de géneros opuestos, Verde es Papá Oso, lo que deja a Azul como Mamá Osa.

$$\boxed{\text{Respuesta: (A) Bebé: rojo, Papá: verde, Mamá: azul}}$$

Solución del Problema 10.

Afirmamos que Jack no puede obtener más de 32 monedas. Supongamos que los piratas están sentados en un círculo, como se muestra a la derecha. Primero, Jack puede obtener 32 monedas si les da 33 a sus vecinos A y E, 1 al pirata C y 0 a los piratas B y D. Al hacerlo, A, C y E votarán *"sí"*.

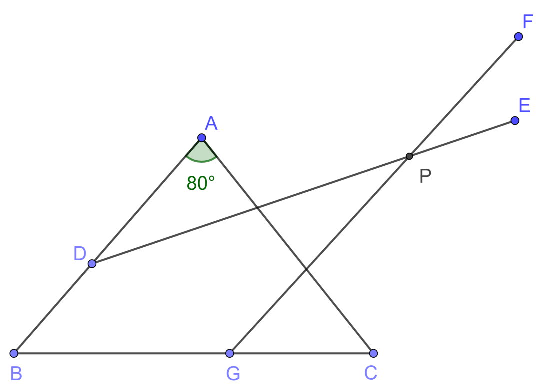


A continuación, debemos demostrar que Jack no puede darse más de 32 monedas. Es imposible que los piratas vecinos voten *"sí"*, ya que un pirata que vote *"sí"* debe obtener más dinero que su vecino. Su vecino votaría *"no"*. Esto significa que Jack necesita que los piratas A, C y E voten *"sí"*. Por lo tanto, si Jack se da al menos 33 monedas, entonces A y E deben recibir al menos 34 monedas cada uno. Esto significa que entre esos tres piratas ya hay $33+34+34 = 101$ monedas, lo cual es imposible.

$$\boxed{\text{Respuesta: (C) 32}}$$

Solución del Problema 11.

Al ser el triángulo ABC isósceles, con $AB = AC$, $\angle ABC = 50$. Sea P el punto de intersección de DE con FG, entonces en el cuadrilátero $BDPG$, la suma de ángulos internos es 360. Por opuestos por el vértice $\angle DPG = 30$. De donde $\angle BDP = 360 - \angle ABC - \angle BGF - \angle DPG = 360 - 50 - 120 - 30 = 160$, así $\angle ADE = 20$.



$$\boxed{\text{Respuesta: (B) 20}}$$

Solución del Problema 12.

Veamos cuántos caminos hay de A a C: Simbolicemos por D un movimiento a la derecha y por A un movimiento arriba. Note que todo camino de A a C tiene dos D y dos A, y recćiprocamente, o sea dos A y dos D definen un camino de A a

C. ¿Cuántas sucesiones de 4 letras con dos A y dos D existen? Veamos: $DDAA$, $DADA$, $DAAD$, $AADD$, $ADAD$, $ADDA$, o sea son seis sucesiones. Del mismo modo, hay 6 caminos de C a B. Combinando todos estos caminos, tenemos que hay 36 caminos de A a B pasando por C.

$\boxed{\text{Respuesta: (B) 36}}$

OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: opmatumsa@fcpn.edu.bo
http://opmat.fcpn.edu.bo/