22^a Olimpiada Paceña de Matemática

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Universidad Mayor de San Andrés.

PRIMERA FASE

Prueba de clasificación

PREGUNTAS Y SOLUCIONES

Charlie Lozano, Carlos Pozo, Fernando Vera

Categoría γ

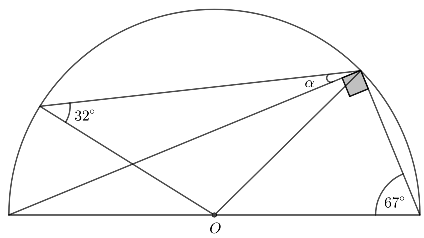
5^{to} y 6^{to} de Secundaria

Junio, 2025

Preguntas

Tiempo estimado: 80 min

Problema 1. La figura muestra una semicircunferencia con centro O. Se dan dos de los ángulos. ¿Cuánto mide el ángulo α?



(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 12

Problema 2. Un músico desea establecer un horario semanal para practicar su instrumento. Se han definido las siguientes reglas: se practicará tres días a la semana, no se practicará en dos días consecutivos, el horario se mantendrá constante cada semana. ¿Cuántos horarios posibles existen bajo estas condiciones?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Problema 3. Los dígitos de un número N aumentan de izquierda a derecha. ¿Cuál podría ser la suma de los dígitos de $9 \times N$?

(A) 1 (B) 3 (C) 6 (D) 7 (E) 9

Problema 4. Hallar la suma de las cifras del resultado de $\underbrace{666\ldots66}_{\text{2025 cifras}} \times 35$

(A) 6075 (B) 6076 (C) 6074 (D) 6081 (E) 6072

Problema 5. ¿Cuál es el valor de

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\,\sin\left(\frac{2\pi}{24}\right)\,\cdots\,\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)}{\cos\left(\frac{6\pi}{24}\right)\,\cos\left(\frac{7\pi}{24}\right)\,\cdots\,\cos\left(\frac{11\pi}{24}\right)}?$$

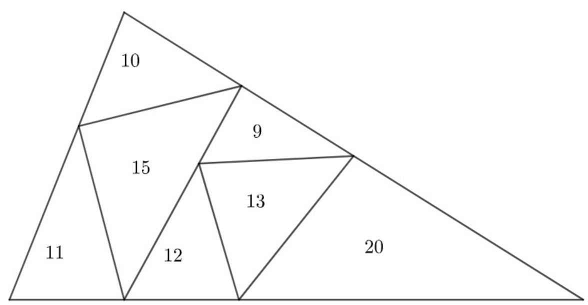
(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) 1 (E) $\sqrt{2}$

Problema 6. ¿Cuál es el dígito de las unidades de la potencia

$$\underbrace{7^{7^{\cdots^{7}}}}_{\text{2025 veces}}\ ?$$

(A) 7 (B) 9 (C) 3 (D) 1 (E) 0

Problema 7. Un triángulo grande se divide en triángulos más pequeños como se muestra en la imagen. El número dentro de cada triángulo pequeño indica su perímetro. ¿Cuál es el perímetro del triángulo grande?



(A) 31 (B) 32 (C) 33 (D) 34 (E) 35

Problema 8. ¿Cuál es la suma de las raíces de un polinomio $p(x)$ de segundo grado, tal que: $p(0) = -1$, $p(1) = 2$, $p(2) = 9$?

(A) 1 (B) 1/2 (C) $-1/2$ (D) 2 (E) 2/3

Problema 9. ¿Cuántos números naturales menores que un millón son múltiplos de 9 y están formados exclusivamente por los dígitos 5 y 8?

(A) 22 (B) 23 (C) 24 (D) 25 (E) 26

Problema 10. La Reina de las Abejas inventó un nuevo lenguaje para su colmena. El alfabeto tiene solo seis letras: A, C, E, N, R y T; sin embargo, el orden alfabético es diferente al del español. Una palabra es cualquier secuencia de seis letras diferentes. En el diccionario de este idioma, la palabra TRANCE aparece inmediatamente después de NECTAR. ¿Cuál es la última palabra del diccionario?

(A) *TRENCA* (B) *CATREN* (C) *ECTNAR* (D) *TECNAR* (E) *RECNAT*

Problema 11. Cincuenta y cinco paceños y cochalas se reunieron en una cafetería y cada uno pidió café o té. Los paceños dicen la verdad cuando toman té y mienten cuando toman café; los cochalas hacen lo contrario. Un periodista realizó una encuesta rápida:

- Cuarenta y cuatro personas respondieron *"sí"* a la pregunta *"¿Estás tomando café?"*.
- Treinta y tres personas respondieron *"sí"* a la pregunta *"¿Eres cochala?"*.
- Veintidós personas estuvieron de acuerdo con la afirmación *"Está lloviendo afuera"*.

¿Cuántos paceños en la cafetería están tomando té?

(A) 0 (B) 20 (C) 55 (D) 22 (E) 1

Problema 12. Supongamos que a, b y c son números reales no negativos, tales que

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2025, \qquad abc = 675.$$

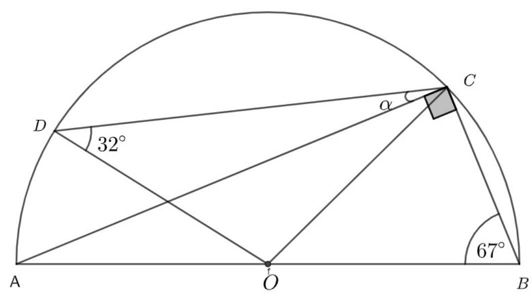
Hallar el menor valor posible de:

$$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3.$$

(A) 15840 (B) 16200 (C) 16875 (D) 17550 (E) 18225

Soluciones

Solución del Problema 1. Sean A, B, C y D como en la figura.



Como el triángulo ABC es rectángulo, y $\angle ABC = 67$, entonces $\angle BAC = 23$. Como el triángulo AOC es isósceles, entonces $\angle OCA = \angle OAC = 23$. Como el triángulo DOC también es isósceles, $\angle ODC = \angle DCO$, así: $32 = \alpha + 23$, de donde $\alpha = 9$.

$$\boxed{\text{Respuesta: (C) 9}}$$

Solución del Problema 2. Como el horario de práctica se mantiene constante durante toda la semana, los posibles horarios quedan definidos por los días que el músico practica su instrumento. Representamos los días de la semana como los números del 1 al 7. Debemos seleccionar 3 días distintos para practicar, con la condición de que no haya días consecutivos. Es decir, si se elige un día d, los días $d - 1$ y $d + 1$ no pueden ser seleccionados en la misma combinación.
Procedemos a enumerar todas las combinaciones de 3 días que cumplen esta condición. Las combinaciones válidas, sin días consecutivos, son:

$$(1, 3, 5), \quad (1, 3, 6), \quad (1, 4, 6),$$
$$(2, 4, 6), \quad (2, 4, 7), \quad (2, 5, 7), \quad (3, 5, 7)$$

Cada una de estas combinaciones cumple con la condición de que ningún par de días seleccionados son consecutivos.

$$\boxed{\text{Respuesta: (D) 7}}$$

Solución del Problema 3.

Veamos algunos ejemplos. Cuando N es un número de un solo dígito, sabemos por las tablas de multiplicar que la suma de los dígitos de $9 \times N$ es 9. Cuando $N = 12$, podemos multiplicar $9 \times N = 108$, y la suma de los dígitos es 9. Cuando $N = 123$, podemos multiplicar $9 \times N = 1107$. Nuevamente, la suma de los dígitos es 9. Cuando $N = 239$, podemos multiplicar $9 \times N = 2151$. Nuevamente, la suma de los dígitos es 9. Quizás esto nos dé una causa probable para suponer que la suma de los dígitos de $9 \times N$ siempre será 9. Ahora, a demostrarlo.

En esta solución, utilizamos el hecho de que $9N = 10N - N$. Supongamos que escribimos $N = d_1 d_2 \cdots d_k$, donde d_k es el dígito de las unidades, d_{k-1} es el dígito de las decenas, y así sucesivamente. Al restar $10N - N$, el hecho de que $d_1 < d_2 < \cdots < d_{k-1} < d_k$ nos indica que solo necesitamos tomar prestado una vez, de las decenas a las unidades. Esto da:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & d_k - 1 & 10 \\
 & d_1 & d_2 & \dots & d_{k-1} & d_k & \emptyset \\
- & & d_1 & \dots & d_{k-2} & d_{k-1} & d_k \\
\hline
 & d_1 & d_2 - d_1 & \dots & d_{k-1} - d_{k-2} & d_k - d_{k-1} - 1 & 10 - d_k
\end{array}$$

Así la suma de los dígitos es

$$d_1 + (d_2 - d_1) + (d_3 - d_2) + \cdots + (d_{k-2} - d_{k-1}) + (d_k - d_{k-1} - 1) + (10 - d_k) = 10 - 1 = 9.$$

$$\boxed{\text{Respuesta: (E) 9}}$$

Solución del Problema 4.

Sea el número $N = \underbrace{666..,66}_{n \text{ cifras}}$, donde $n = 2025$.

El producto a calcular es $P = N \times 35$. Analicemos los primeros casos para identificar un patrón en la estructura del resultado y la suma de sus cifras:

- Para $n = 1$: $6 \times 35 = 210$. La suma de sus cifras es $2 + 1 + 0 = 3$.
- Para $n = 2$: $66 \times 35 = 2310$. La suma de sus cifras es $2 + 3 + 1 + 0 = 6$.
- Para $n = 3$: $666 \times 35 = 23310$. La suma de sus cifras es $2 + 3 + 3 + 1 + 0 = 9$.

De estos ejemplos, observamos que el producto P tiene la forma general $2\,\underbrace{33..,3}_{n-1}\,10$.

La suma de las cifras de P, denotada S_n, sigue el patrón:

$$S_n = 2 + \underbrace{3 + 3 + ... + 3}_{n-1 \text{ veces}} + 1 + 0$$

$$S_n = 2 + 3(n-1) + 1$$
$$S_n = 2 + 3n - 3 + 1$$
$$S_n = 3n$$

Para el problema dado, $n = 2025$. Sustituimos este valor en la fórmula de la suma de cifras:

$$S_{2025} = 3 \times 2025$$
$$S_{2025} = 6075$$

La suma de las cifras del resultado es 6075.

$$\boxed{\text{Respuesta: (A) 6075}}$$

Solución del Problema 5. Usamos la identidad $\cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$. Observe que

$$\cos\left(\tfrac{7\pi}{24}\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{7\pi}{24}\right) = \sin\left(\tfrac{12\pi - 7\pi}{24}\right) = \sin\left(\tfrac{5\pi}{24}\right),$$

y análogamente $\cos(\frac{8\pi}{24}) = \sin(\frac{4\pi}{24}), \ldots, \cos(\frac{11\pi}{24}) = \sin(\frac{\pi}{24})$. Por tanto

$$\cos\left(\tfrac{6\pi}{24}\right)\cos\left(\tfrac{7\pi}{24}\right)\cdots\cos\left(\tfrac{11\pi}{24}\right) = \cos\left(\tfrac{6\pi}{24}\right)\sin\left(\tfrac{5\pi}{24}\right)\sin\left(\tfrac{4\pi}{24}\right)\cdots\sin\left(\tfrac{\pi}{24}\right).$$

Así la fracción original es

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{24})\sin(\frac{2\pi}{24})\cdots\sin(\frac{5\pi}{24})}{\cos(\frac{6\pi}{24})\ \sin(\frac{5\pi}{24})\cdots\sin(\frac{\pi}{24})} = \frac{1}{\cos(\frac{6\pi}{24})} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}.$$

$$\boxed{\text{Respuesta: (E) } \sqrt{2}}$$

Solución del Problema 6. La sucesión de unidades de 7^n es cíclica de periodo 4:

$$7^1 \equiv 7, \quad 7^2 \equiv 9, \quad 7^3 \equiv 3, \quad 7^4 \equiv 1 \pmod{10}.$$

Bastará saber el exponente total E módulo 4. Como la torre

$$E = 7^{7^{\cdots^{7}}} \quad \text{(con 2024 éxponentes de 7 encima)}$$

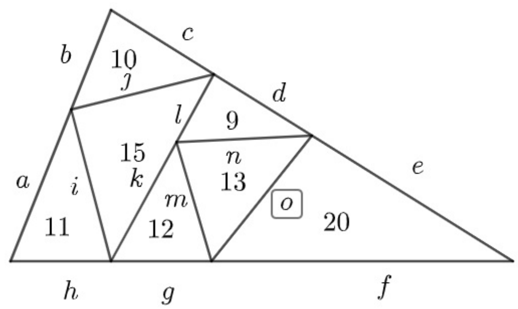
es claramente impar, concluimos

$$E \equiv 7^{\text{impar}} \equiv (-1)^{\text{impar}} \equiv 3 \pmod{4}.$$

Por tanto $7^E \equiv 7^3 \equiv 3 \pmod{10}$.

$\boxed{\text{Respuesta: (C) 3}}$

Solución del Problema 7.
Llamemos los segmentos observados como $a, b, c \ldots, o$ como se ve en la figura:



Dividamos esos segmentos de acuerdo a cuántos triángulos pertenecen: $a, , b, c, d, e, f, g, h$ pertenecena un sólo triángulo, i, j, k, l, m, n, o pertenecen a dos triángulos. Así, observamos que: $a + b + c + d + e + f + g + h + 2(i + j + k + l + m + n + o) = 11+10+15+12+13+9+20 = 90$, y también $i+j+k+l+m+n+o = 15+13 = 28$, de donde $a + b + c + d + e + f + g + h = 90 - 2 \times 28 = 34$.

$\boxed{\text{Respuesta: (D) 34}}$

Solución del Problema 8. Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$, como $p(0) = -1$, entonces $c = -1$. $p(1) = a + b + c = 2$, luego $a + b = 3$, $p(2) = 4a + 2b + c = 9$, luego $4a + 2b = 10$. Resolviendo, tenemos $a = 2, b = 1$. De donde la suma de las raíces del polinomio es $-b/a = -1/2$, por el Teorema de Vieta.

$\boxed{\text{Respuesta: (C) } -1/2}$

Solución del Problema 9. Para que un número sea múltiplo de 9, la suma de sus dígitos debe ser múltiplo de 9. Claramente un tal número no puede tener un dígito, ni dos dígitos. Veamos si puede tener tres dígitos: Si los tres son 8, la suma es 24, si son dos 8 y un 5, la suma es 21, si es un 8 y dos 5, la suma es 18, múltiplo de 9. tres 5, la suma es 15. Claramente, podemos hacer tres números con dos 5 y un 8. El número no puede tener cuatro dígitos, pues con cuatro 8 la suma da

32, con tres 8 y un 5, la suma da 29, con dos 8 y dos 5, la suma da 26, con un 8 y tres 5, la suma da 23 y con cuatro cincos, la suma da 20. De igual forma, con cinco dígitos, ninguna suma posible da un múltiplo de 9. Con seis dígitos, tenemos dos posibilidades: un 5 y cinco 8, la suma da 45 múltiplo de 9 y cuatro 5 y dos 8, la suma da 36. Podemos formar 6 números de seis dígitos con un 5 y cinco 8, 15 números con cuatro 5 y dos 8, basta escoger dos posiciones para los 8, de seis posibles posiciones. En total entonces, la cantidad de números menores que un millón formados sólo con 5 y 8 es: $3 + 6 + 15 = 24$.

$$\boxed{\text{Respuesta: (C) 24}}$$

Solución del Problema 10. La última palabra del diccionario es ECTNAR. Como TRANCE viene inmediatamente después de NECTAR, sabemos que la T es la letra que viene inmediatamente después de la N alfabéticamente. También sabemos que TRANCE es la primera palabra que empieza por T, por lo que R, A, N, C, E están en orden alfabético. Por lo tanto, el orden de las letras es R, A, N, T, C, E. La última palabra del diccionario es ECTNAR.

$$\boxed{\text{Respuesta: (C) } ECTNAR}$$

Solución del Problema 11. No hay paceños que tomen té.

Definamos a como el número de paceños que toman té y b como el número de paceños que toman café. De forma similar, sea c el número de cochalas que toman té y d el número de cochalas que toman café.

	Té	Café
paceños	a	b
cochalas	c	d

Hay 44 personas que responden *"sí"* a la pregunta *"¿Estás tomando café?"*. Quienes responderían así son los cochalas que toman café (que dirían *"sí"* con sinceridad) y los cochalas que toman té (que dirían *"sí"* pero mentirían), por lo que $c + d = 44$. De forma similar, quienes responderían *"sí"* a la pregunta *"¿Eres cochala?"* son los paceños que toman café y los cochalas que toman café, por lo que $b + d = 33$. Finalmente, quienes estarían de acuerdo con la afirmación sobre el tiempo son todos honestos o todos mentirosos. Hay $a+d$ personas honestas y $b+c$ mentirosos. Por lo tanto, $a+d=22$ o $b+c=22$. Primero, afirmamos que $b+c$ no puede ser igual a 22. La razón es que

$$77 = 44 + 33 = (b+d) + (c+d) = b + c + 2d,$$

lo que significa que $b+c$ debe ser impar. Por lo tanto, $a+d=22$. Ahora, sumamos

$$(a+d) + (b+d) + (c+d) = (a+b+c+d) + 2d.$$

Sabemos que esta suma total es igual a $44+33+22=99$ y $a+b+c+d=55$, ya que hay 55 personas en la cafetería. Por lo tanto, $99 = 55+2d$ y $d=22$. Queremos saber cuántos paceños están tomando té, lo que significa que necesitamos calcular a. Como $a+d=22$, vemos que $a=0$.

$$\boxed{\text{Respuesta: (A) 0}}$$

Solución del Problema 12.
Por la desiguladad MA-MG:
$(a+b)^3 \geq (2\sqrt{ab})^3$
$(b+c)^3 \geq (2\sqrt{bc})^3$
$(c+a)^3 \geq (2\sqrt{ca})^3$
De nuevo por la desigualdad MA-MG:
$(2\sqrt{ab})^3 + (2\sqrt{bc})^3 + (2\sqrt{ca})^3 \geq 3((2\sqrt{ab}) \times (2\sqrt{bc}) \times (2\sqrt{ca})) = 24abc = 24 \times 675 = 16200$

$$\boxed{\text{Respuesta: (B) 16200}}$$

Olimpiada Paceña de Matemática
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: opmatumsa@fcpn.edu.bo
http://opmat.fcpn.edu.bo/