22^a Olimpiada Paceña de Matemática

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Universidad Mayor de San Andrés.

SEGUNDA FASE

Prueba de clasificación

PREGUNTAS

Categoría γ

5^{to} y 6^{to} de Secundaria

Agosto, 2025

Preguntas

Tiempo estimado: 90 min

Parte 1: Problemas de selección múltiple

Problema 1. La función $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ satisface la siguiente ecuación para todo $x, y \in (0, \infty)$:

$$10 - \frac{x+y}{xy} = f(x)\,f(y) - f(xy) - 90.$$

¿Cuál es el valor de $f\left(\frac{1}{2025}\right)$?

(A) 2015 (B) 2020 (C) 2025 (D) 2030 (E) 2035

Problema 2. ¿Para qué valor de x se cumple la siguiente igualdad?

$$\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x} \;+\; \log_2 x \;+\; \log_4\left(x^2\right) \;+\; \log_8\left(x^3\right) \;+\; \log_{16}\left(x^4\right) \;=\; 40\,?$$

(A) 8 (B) 16 (C) 32 (D) 256 (E) 1024

Problema 3. Una clase de 10 estudiantes realizó un examen de matemáticas. Cada problema fue resuelto por exactamente 7 estudiantes. Si los primeros nueve estudiantes resolvieron 4 problemas cada uno, ¿cuántos problemas resolvió el décimo estudiante?

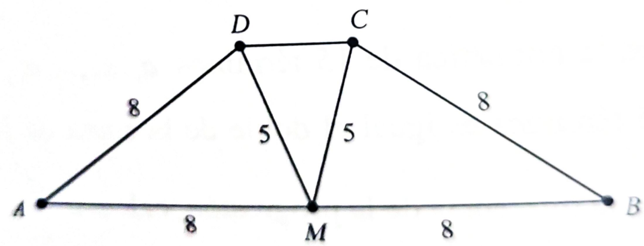
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

–

Problema 4. Sea $ABCD$ un rectángulo de lados AB, BC, CD Y DA. Sea E un punto en el lado CD. Si área(ADE)=1/5 área($ABCE$), entonces $\frac{DC}{CE}$ es igual a:

(A) 5/3 (B) 3/2 (C) 5/4 (D) 7/4 (E) 9/5

Problema 5. Sea $ABCD$ un trapecio isósceles tal que AB es paralelo a CD (los lados no paralelos son BC y DA). Se sabe que $AB = 16$ y $AD = BC = 8$. Además M es el punto medio de AB y $DM = CM = 5$. ¿Cuánto mide CD?

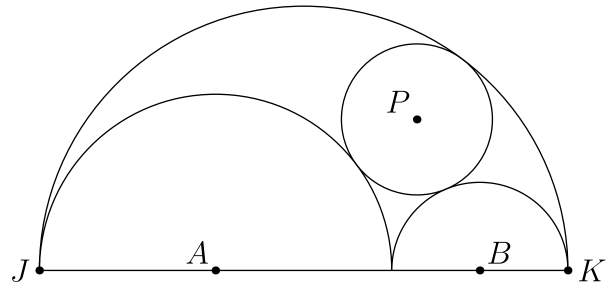


(A) 3 (B) 13/4 (C) 16/5 (D) 19/6 (E) 25/8

Parte 2: Preguntas de respuesta corta numérica

Problema 6. Sea la sucesión de números reales $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ con la propiedad de que, para cada entero k entre 1 y 100, el término x_k es menor que la suma de los otros 99 términos. ¿Cuál es el valor de x_{50}?

Problema 7. En la figura siguiente, se han dibujado tres semicírculos sobre el mismo segmento JK como diámetro. Los semicírculos pequeños tienen centros en A y B y radios 2 y 1, respectivamente; son tangentes exteriormente entre sí y tangentes interiormente al semicírculo mayor. Se dibuja un círculo con centro en P que es tangente exteriormente a los dos semicírculos pequeños e interiormente al semicírculo mayor. ¿Cuál es el radio del círculo de centro P?



Problema 8. Un patio de recreo tiene un columpio con exactamente tres columpios. Cuando los alumnos de 3ro y 4to de primaria de la clase de matemáticas del Prof. Hernán juegan durante el recreo, tienen una regla de que si un estudiante de 3ro está en el columpio del medio, debe haber alumnos de 4to a la izquierda y a la derecha de ese alumno. Y si hay un estudiante de 4to en el medio, debe haber alumnos de 3ro a la izquierda y a la derecha de ese alumno. El Prof. Hernán calcula que hay 350 diferentes formas en las que sus estudiantes pueden organizarse en los tres columpios sin lugares vacíos. ¿Cuántos estudiantes hay en su clase?

Problema 9. La ciudad de *Viejo Refugio* es conocida por tener un gran número de sociedades secretas. Cualquier persona puede ser miembro de múltiples sociedades. Una sociedad secreta se llama influyente si sus miembros incluyen al menos la mitad de la población de Viejo Refugio. Hoy en día, hay 2026 sociedades secretas influyentes. ¿Cuál es el máximo de personas que puede tener un consejo, de modo que cada sociedad secreta influyente tenga al menos un miembro en el consejo?

Problema 10. Los 10000 puntos en una cuadrícula cuadrada de 100×100 son todos de color azul. Fabiola puede pintar algunos de ellos de rojo, pero siempre debe haber un punto azul en el segmento de línea entre dos puntos rojos cualesquiera. ¿Cuál es el mayor número de puntos que puede colorear de rojo?