23.ª OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática

Facultad de Ciencias Puras y Naturales – Universidad Mayor de San Andrés

(1ro y 2do de Secundaria)

Pregunta y Solución de la Prueba Fase Final

Categoría: α

Problema 1.

Puntaje: ☐

Hallar 18 números enteros positivos consecutivos que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

- Ninguno de los 18 números es divisible por 19.
- La suma de los 18 números es un cuadrado perfecto de cuatro cifras.

Solución. Como se tienen 18 enteros consecutivos y ninguno es divisible por 19, estos números deben ser

$$19k+1, 19k+2, \ldots, 19k+18$$

para algún entero $k \geq 0$. Su suma es $(19k+1)+(19k+2)+\cdots+(19k+18) = 342k+171 = 171(2k+1)$. Por hipótesis, esta suma es un cuadrado perfecto de cuatro cifras. Entonces existe un entero m tal que

$$m^2 = 171(2k+1) = 3^2 \cdot 19(2k+1).$$

Como 19 divide a m^2, también divide a m, y como 3 divide a m, se tiene $57 \mid m$. Por lo tanto, m debe ser un múltiplo de 57. Los primeros múltiplos positivos de 57 son

$$57,\ 114,\ 171, \ldots$$

y sus cuadrados comienzan con $57^2 = 3249$, $114^2 = 12996$. Así, el único cuadrado de cuatro cifras cuyo lado es múltiplo de 57 es 3249. Por consiguiente,

$$171(2k+1) = 3249,$$

y dividiendo entre 171 obtenemos $2k+1 = 19$. De donde, $k = 9$. Por tanto, la única sucesión que satisface las condiciones es $172, 173, \ldots, 189$.

Problema 2.

Puntaje: ☐

Gabriela escribe una lista de números comenzando con el 25. A partir de este, cada nuevo número se obtiene sumando los cuadrados de los dígitos del número anterior. Por ejemplo, los primeros tres términos son 25, 29 y 85, pues $29 = 2^2 + 5^2$ y $85 = 2^2 + 9^2$.

(a) Escribe los primeros 12 términos de la lista, identifica el primer número que se repite y determina la longitud del ciclo.

(b) Halla el número que ocupa la posición 2026 en la lista de Gabriela.

Solución.

(a) Calculamos los términos de la sucesión aplicando la regla dada:

$$a_1 = 25$$
$$a_2 = 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$$
$$a_3 = 2^2 + 9^2 = 4 + 81 = 85$$
$$a_4 = 8^2 + 5^2 = 64 + 25 = 89$$
$$a_5 = 8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$$
$$a_6 = 1^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 16 + 25 = 42$$
$$a_7 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$$
$$a_8 = 2^2 + 0^2 = 4$$
$$a_9 = 4^2 = 16$$
$$a_{10} = 1^2 + 6^2 = 1 + 36 = 37$$
$$a_{11} = 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$$
$$a_{12} = 5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$$

Como $a_{12} = a_4 = 89$, el primer número que se repite es el **89**. A partir de este punto, los términos entran en un ciclo periódico de **8** elementos (a_4 hasta a_{11}).

(b) Para hallar el número en la posición 2026, primero se separan los primeros 3 términos (a_1, a_2, a_3), que forman una etapa inicial antes de que comience el ciclo periódico $2026-3 = 2023$. Dividimos 2023 entre la longitud del ciclo (8) para ver cuántas repeticiones completas ocurren:

$$2023 = 8 \cdot 252 + 7$$

Esto significa que la posición 2026 equivale a 252 ciclos completos más un desplazamiento de 7 posiciones dentro del ciclo:

$$2026 = 3 + 8 \cdot 252 + 7$$

El residuo es 7, lo que indica que debemos tomar el **séptimo elemento del ciclo**. Contando desde el inicio del ciclo (a_4):

- 1.er elemento (a_4): 89
- 2.º elemento (a_5): 145
- 3.er elemento (a_6): 42
- 4.to elemento (a_7): 20
- 5.to elemento (a_8): 4
- 6.to elemento (a_9): 16
- **7.mo elemento (a_{10}):** 37

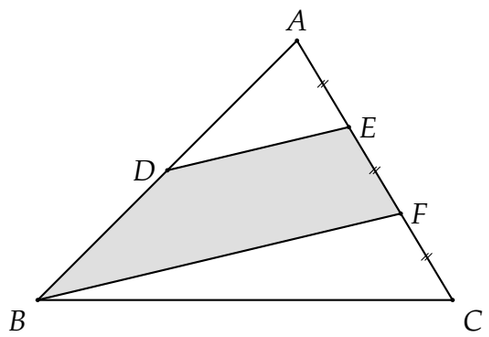
Por lo tanto, el número que ocupa la posición 2026 en la lista de Gabriela es **37**.

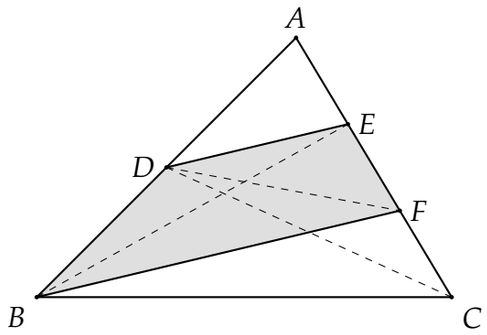
Problema 3.

Puntaje: ☐

Sea ABC un triángulo cualquiera. El punto D es el punto medio del lado AB, y los puntos E y F dividen el lado AC en tres partes iguales, en el orden A, E, F, C. ¿Qué fracción del área del triángulo ABC corresponde al cuadrilátero $BDEF$?

Solución. Denotaremos por $[XYZ]$ el área del triángulo XYZ. La situación del problema es la siguiente:





Queremos determinar qué parte del área del triángulo ABC ocupa el cuadrilátero sombreado $BDEF$. Para comparar áreas, trazamos los segmentos auxiliares CD, DF y BE.

Como D es el punto medio de AB, se tiene $AD = DB$. Los triángulos ACD y BCD tienen bases iguales, AD y DB, y la misma altura desde C. Por tanto, tienen la misma área. Así,

$$[ACD] = \frac{1}{2}[ABC].$$

Ahora observemos el triángulo ACD. Como $AE = EF = FC$, los triángulos ADE, DEF y DFC tienen bases iguales sobre la misma recta y la misma altura desde D. Por tanto, tienen la misma área.
Como los tres forman el triángulo ACD, cada uno ocupa la tercera parte de su área. En particular,

$$[ADE] = \frac{1}{3}[ACD].$$

Como $[ACD]$ es la mitad de $[ABC]$, resulta $[ADE] = \frac{1}{6}[ABC]$. Por otra parte, los segmentos BE y BF dividen el triángulo ABC en los triángulos ABE, BEF y BFC. Como $AE = EF = FC$, estos tres triángulos tienen bases iguales y la misma altura desde B. Por tanto, tienen la misma área. Así,

$$[BFC] = \frac{1}{3}[ABC].$$

Finalmente, el cuadrilátero $BDEF$ es lo que queda del triángulo ABC al quitar los triángulos ADE y BFC. Entonces

$$[BDEF] = [ABC] - [ADE] - [BFC].$$

Por tanto, $[BDEF] = \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)[ABC] = \frac{1}{2}[ABC]$. Así, la fracción pedida es $\dfrac{1}{2}$.

Problema 4.

Puntaje: ☐

Remplaza cada uno de los recuadros □ por los números enteros del 1 al 30, usando cada número exactamente una vez, de tal manera que la suma de las 15 fracciones sea un número entero:

$$\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square}.$$

Solución. Una de las ideas clave para abordar este problema es analizar el rol de los números primos mayores que 15, es decir, $17, 19, 23$ y 29. Ninguno de estos números posee un múltiplo menor o igual que 30 (salvo ellos mismos). Por lo tanto, si alguno de ellos fuera elegido como denominador, sería imposible combinarlo con otro número del 1 al 30 en el numerador para obtener un número entero (a menos que el numerador fuera un múltiplo de dicho primo, lo cual es imposible en este rango). En consecuencia, los números $17, 19, 23$ y 29 deben aparecer necesariamente como numeradores.Por otra parte, como es imposible que las 15 fracciones resulten enteras de forma individual, una estrategia útil consiste en agruparlas en familias cuyos denominadores y numeradores se combinen para anular factores y producir sumas enteras. Dado que el problema admite múltiples soluciones válidas, a continuación se presentan dos distribuciones correctas diferentes. Por ejemplo, la siguiente distribución utiliza cada uno de los números $1, 2, \ldots, 30$ exactamente una vez:

$$\frac{19}{2} + \frac{23}{4} + \frac{29}{8} + \frac{18}{16} + \frac{21}{14} + \frac{10}{20} + \frac{12}{6} + \frac{17}{1} + \frac{22}{11} + \frac{24}{3} + \frac{25}{5} + \frac{26}{13} + \frac{27}{9} + \frac{28}{7} + \frac{30}{15}$$

Al simplificar y agrupar convenientemente,

$$\begin{aligned} \frac{19}{2} + \frac{23}{4} + \frac{29}{8} + \frac{18}{16} + \frac{21}{14} + \frac{10}{20} &= \frac{176}{8} = 22, \\ \frac{12}{6} + \frac{22}{11} + \frac{24}{3} + \frac{25}{5} + \frac{26}{13} + \frac{27}{9} + \frac{28}{7} + \frac{30}{15} &= 11, \\ \frac{17}{1} &= 17. \end{aligned}$$

Por tanto, $22 + 11 + 17 = 50$, por lo que esta distribución produce un número entero. De manera análoga, también es posible, por ejemplo, utilizar la distribución

$$\frac{29}{9} + \frac{14}{18} + \frac{23}{5} + \frac{6}{15} + \frac{17}{7} + \frac{12}{21} + \frac{19}{4} + \frac{25}{20} + \frac{28}{8} + \frac{24}{16} + \frac{22}{11} + \frac{26}{13} + \frac{27}{3} + \frac{30}{10} + \frac{2}{1}.$$

En este caso,

$$\begin{aligned} &\frac{29}{9} + \frac{14}{18} = 4, \quad && \frac{23}{5} + \frac{6}{15} = 5, \quad && \frac{17}{7} + \frac{12}{21} = 3, \quad && \frac{19}{4} + \frac{25}{20} = 6, \\ &\frac{28}{8} + \frac{24}{16} = 5, \quad && \frac{22}{11} + \frac{26}{13} = 4, \quad && \frac{27}{3} + \frac{30}{10} + \frac{2}{1} = 14. \end{aligned}$$

La suma total es $4 + 5 + 3 + 6 + 5 + 4 + 14 = 41$. Por consiguiente, existen múltiples distribuciones que satisfacen las condiciones del problema.

Problema 5 .

Puntaje: ☐

Se escriben 10 números enteros en una fila. Debajo de cada número A se escribe la cantidad de números que están a su derecha y que son estrictamente mayores que A. De esta manera se obtiene una segunda fila de 10 números. Luego se repite el mismo procedimiento con la segunda fila para obtener una tercera fila, y así sucesivamente.

(a) Demuestra que, después de repetir el procedimiento varias veces, aparecerá una fila formada únicamente por ceros.

(b) ¿Cuál es el mayor número posible de filas que pueden aparecer antes de obtener una fila formada únicamente por ceros? Es decir, ¿cuál es el mayor número posible de filas que contienen al menos un número distinto de cero?

Solución. Llamemos $F1$ a la fila inicial, $F2$ a la segunda fila, y así sucesivamente.

(a) La primera fila puede contener números enteros negativos, positivos o cero. Sin embargo, desde la segunda fila todos los números son no negativos, porque cada uno representa una cantidad. Además, el último número de $F2$ es 0, ya que a la derecha del último número de la primera fila no hay ningún número. Por tanto, la segunda fila termina en

$$\cdots, 0.$$

Ahora observemos qué ocurre a partir de este momento. Supongamos que una fila, desde F_2 en adelante, termina en k ceros:

$$\cdots, a, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k \text{ ceros}}.$$

Como todos los números de esta fila son no negativos, se tiene $a \geq 0$. Al formar la fila siguiente, debajo de a debemos contar cuántos números a su derecha son estrictamente mayores que a. Pero todos esos números son 0, y ninguno de ellos es mayor que a. Por tanto, debajo de a también se escribe 0. Así, si una fila termina en k ceros, la siguiente termina en al menos $k+1$ ceros. Entonces, a partir de la segunda fila, el número de ceros consecutivos al final va aumentando:

$$\begin{array}{c} * \ * \ * \ * \ * \ * \ * \ * \ * \ 0, \\ * \ * \ * \ * \ * \ * \ * \ * \ 0 \ 0, \\ * \ * \ * \ * \ * \ * \ * \ 0 \ 0 \ 0, \\ \vdots \end{array}$$

Como hay solamente 10 posiciones, finalmente se obtiene una fila formada únicamente por ceros.

(b) En la segunda fila hay al menos un cero al final. En la tercera hay al menos dos, en la cuarta al menos tres, y así sucesivamente. Por tanto, a más tardar la fila F_{11} es

$$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.$$

Esto significa que puede haber como máximo 10 filas que contengan algún número distinto de cero. Falta comprobar que este máximo puede alcanzarse.

Por ejemplo, si comenzamos con $0,\ 3,\ 1,\ 5,\ 2,\ 7,\ 4,\ 9,\ 6,\ 8,$ se obtienen las filas

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 3 & 1 & 5 & 2 & 7 & 4 & 9 & 6 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{array}$$

Las primeras 10 filas contienen al menos un número distinto de cero, mientras que la undécima es la primera fila formada sólo por ceros. Por lo tanto, el mayor número posible de filas no nulas es 10.