



23.a OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática

Facultad de Ciencias Puras y Naturales – Universidad Mayor de San Andrés



SOLUCIÓN DE LA PRUEBA – FASE 2

Categoría: α

Parte I: Preguntas de Opciones Múltiples

Problema 1. Para cada entero positivo n , definimos $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Por ejemplo, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Se considera la suma

$$1! + 2! + 3! + \cdots + 2025! + 2026!.$$

¿Cuál es el dígito de las unidades de esta suma?

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

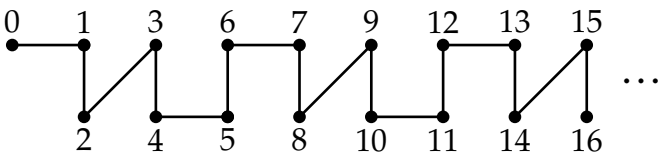
Solución. Observemos que, para todo $(n \geq 5)$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ contiene entre sus factores tanto a 2 como a 5. Por lo tanto, $10 = 2 \cdot 5$ divide a $n!$, de modo que $(n!)$ termina en 0. En particular, $5!, 6!, 7!, \dots, 2025!, 2026!$ tienen todos dígito de las unidades igual a 0. Por consiguiente, $5! + 6! + \cdots + 2025! + 2026!$ también tiene dígito de las unidades igual a 0. Ahora calculamos los primeros cuatro factoriales: $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$. Por tanto, esta suma termina en 3. Finalmente, como todos los términos desde $5!$ en adelante aportan 0 al dígito de las unidades, la suma completa

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \cdots + 2025! + 2026!$$

termina en $3 + 0 = 3$.

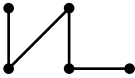
Respuesta: (C) 3

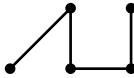
Problema 2. En la figura se muestra una trayectoria por una secuencia de segmentos:

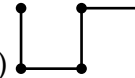


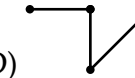
¿Cuál es la forma del camino que une el punto 2022 con el punto 2026?

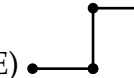
- (A)


- (B)


- (C)


- (D)

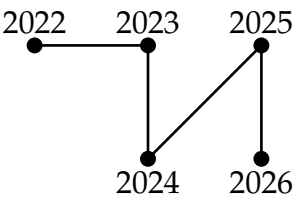

- (E)



Solución. Observemos la trayectoria dada. Su forma se repite cada 6 segmentos consecutivos. Por tanto, para determinar la forma del camino que une dos puntos, basta considerar los residuos de sus índices módulo 6. Como $2022 = 337 \cdot 6$, se tiene $2022 \equiv 0 \pmod{6}$. Por consiguiente, el tramo que une los puntos 2022, 2023, 2024, 2025, 2026 tiene la misma forma que el tramo que une 6, 7, 8, 9, 10. En la figura, el camino de 6 a 10 está formado por los siguientes segmentos:

$$6 \longrightarrow 7, \quad 7 \longrightarrow 8, \quad 8 \longrightarrow 9, \quad 9 \longrightarrow 10.$$

Su forma es, respectivamente: horizontal, vertical hacia abajo, diagonal hacia arriba y vertical hacia abajo. Por lo tanto, el camino que une 2022 con 2026 tiene la misma forma:



Respuesta: (D)

Problema 3. ¿De cuántas formas se puede descomponer el número 2026 como la suma de dos enteros mayores o iguales a cero, sin realizar ningún acarreo (sin llevar)?

Aclaración: La descomposición $2000 + 26$ y $26 + 2000$ representan una misma forma de descomponer 2026, además la suma $2000 + 26 = 2026$ vale porque no se lleva nada, pero $2008 + 18 = 2026$ no vale porque “se lleva 1” de las unidades a las decenas.

- (A) 36
- (B) 31
- (C) 30
- (D) 64
- (E) 32

Solución 1: En cada columna de la siguiente tabla indicamos los posibles dígitos para formar dos enteros como suma sin acarreos e igual a 2026.

2	0	2	6
0 2	0 0	0 2	0 6
1 1		1 1	1 5
2 0		2 0	2 4
			3 3
			4 2
			5 1
			6 0

Por ejemplo, si elegimos los pares $\boxed{1\ 1}$, $\boxed{0\ 0}$, $\boxed{1\ 1}$ y $\boxed{3\ 3}$ (uno en cada columna) obtenemos los números 1013 y 1013, que satisfacen

1013 + 1013 = 2026

Tenemos $3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 = 63$ casos en total. Observamos que únicamente en el caso $1013 + 1013 = 2026$ los dos números son iguales. Para los demás $63 - 1 = 62$ casos, estamos contando cada solución dos veces (por ejemplo, $2013 + 13 = 13 + 2013 = 2026$). Por lo tanto, la cantidad de formas de sumar 2026 sin acarreos es:

$$\frac{62}{2} + 1 = 31 + 1 = 32.$$

Solución 2: Descomponemos los dígitos de 2026 como suma de dos números enteros mayores o iguales a cero sin acarreos, de tal forma que el dígito de las unidades cambia y los demás dígitos se mantienen constantes, de esta manera obtenemos 5 casos como se muestra a continuación:

2020651423 + 0006015243 2026666666	1020651423 + 1006015243 2026666666
2010651423 + 0016015243 2026666666	2000651423 + 0026015243 2026666666
1010543 + 1016123 2026666	

Así, la cantidad de formas de sumar 2026 sin acarreos es: $7 + 7 + 7 + 7 + 4 = 32$.

Respuesta: (E) 32

Problema 4. El estándar internacional ISO 216 establece los tamaños de papel utilizados en gran parte del mundo. El formato base es una hoja rectangular denominada (A0), cuyas dimensiones están en la razón $1 : \sqrt{2}$. A partir de la hoja (A0), se obtienen los demás formatos doblándola por la mitad, siempre sobre su lado mayor. De esta manera, (A1) se obtiene al doblar una vez la hoja (A0), (A2) al doblarla dos veces, y así sucesivamente. En una oficina de La Paz se dispone de una hoja de formato (A4), cuyas dimensiones son 21,0 cm por 29,7 cm. ¿Cuáles son las dimensiones, en centímetros, de una hoja de formato (A0)?

(A) $21,0 \times 118,8$ (B) $84,0 \times 29,7$ (C) $84,0 \times 118,8$ (D) $168,0 \times 237,6$ (E) $336,0 \times 475,2$

Solución. Para obtener un formato anterior, debemos realizar el proceso inverso al doblado. Es decir, duplicamos el lado menor de la hoja y conservamos el lado mayor. Partimos del formato (A4), cuyas dimensiones son (21,0) cm por (29,7) cm:

$$A4 = 21,0 \times 29,7.$$

Al pasar de (A4) a (A3), duplicamos el lado menor: $A3 = 29,7 \times (2 \cdot 21,0) = 29,7 \times 42,0$. Continuando de la misma manera:

$$\begin{aligned} A4 &= 21,0 \times 29,7, \\ A3 &= 29,7 \times 42,0, \\ A2 &= 42,0 \times 59,4, \\ A1 &= 59,4 \times 84,0, \\ A0 &= 84,0 \times 118,8. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las dimensiones de la hoja (A0) son $84,0 \text{ cm} \times 118,8 \text{ cm}$.

Respuesta: (C) $84,0 \text{ cm} \times 118,8 \text{ cm}$

Parte II: Preguntas de Respuesta Corta

Problema 5. En las siguientes fracciones, las letras A, B, C, D, E representan, en algún orden, los números 1, 2, 3, 4, 5, utilizando cada número exactamente una vez. Además, cada una de las fracciones debe ser un número entero:

$$\frac{8}{A'}, \quad \frac{9}{B'}, \quad \frac{10}{C'}, \quad \frac{6}{D'}, \quad \frac{7}{E'}.$$

Determine el valor de

$$\frac{8}{A} + \frac{9}{B} + \frac{10}{C} + \frac{6}{D} + \frac{7}{E}.$$

Solución. Observemos que, entre los números del 1 al 5, el único que divide exactamente a 7 es el 1. Por lo tanto, necesariamente debe colocarse el número 1 en lugar de la letra E .

$$\frac{8}{A} \quad \frac{9}{B} \quad \frac{10}{C} \quad \frac{6}{D} \quad \frac{7}{1}$$

Ahora determinemos la ubicación de los números 4 y 5. Entre los numeradores dados, únicamente 8 es divisible por 4, y únicamente 10 es divisible por 5. En consecuencia, $A = 4$, $C = 5$. La situación queda así:

$$\frac{8}{4} \quad \frac{9}{B} \quad \frac{10}{5} \quad \frac{6}{D} \quad \frac{7}{1}$$

Solo resta decidir dónde colocar los números 2 y 3. De los numeradores restantes, únicamente 6 es divisible por 2, por lo que necesariamente $D = 2$. Finalmente, el único número que queda disponible es el 3, de modo que $B = 3$. Por lo tanto, la correspondencia buscada es $A = 4$, $B = 3$, $C = 5$, $D = 2$, $E = 1$. Por tanto,

$$\frac{8}{A} + \frac{9}{B} + \frac{10}{C} + \frac{6}{D} + \frac{7}{E} = 17.$$

Respuesta: 17.

Problema 6. Se dispone de una balanza de dos platillos y de tres pesas, una de cada tipo, con masas de 2 kg; 9 kg y 12 kg. En cada pesada se pueden colocar las pesas en uno o ambos platillos, según sea necesario. ¿Cuántos objetos de masas diferentes se pueden pesar, como máximo? Considere que los objetos que se pesan no pueden utilizarse posteriormente como pesas.

Aclaración: “*Pesar*” significa determinar el peso exacto de un objeto logrando que la balanza de dos platillos quede en perfecto equilibrio usando las pesas disponibles.

Solución. Para determinar todas las masas que pueden pesarse, consideramos las distintas formas de distribuir las tres pesas entre los dos platillos. Como cada pesa se utiliza como máximo una vez, para cada pesa tenemos tres posibilidades: colocarla en el primer platillo, colocarla en el segundo platillo o no utilizarla. Es suficiente considerar cuántas pesas se utilizan.

- **Una sola pesa.** Si utilizamos únicamente una pesa, podemos pesar objetos de masas

$$2\text{ kg}, \quad 9\text{ kg}, \quad 12\text{ kg}.$$

Obtenemos, por tanto, 3 masas diferentes.

- **Dos pesas.** Si las dos pesas se colocan en el mismo platillo, podemos pesar objetos de masas

$$2 + 9 = 11\text{ kg}, \quad 2 + 12 = 14\text{ kg}, \quad 9 + 12 = 21\text{ kg}.$$

Si se colocan en platillos opuestos, la masa del objeto debe ser igual a la diferencia entre las masas de las pesas. Así obtenemos

$$9 - 2 = 7\text{ kg}, \quad 12 - 2 = 10\text{ kg}, \quad 12 - 9 = 3\text{ kg}.$$

En total, obtenemos 6 masas diferentes.

- **Las tres pesas.** Si las tres pesas se colocan en el mismo platillo, podemos pesar

$$2 + 9 + 12 = 23\text{ kg}.$$

Si dos pesas se colocan en un platillo y la tercera en el platillo opuesto, obtenemos

$$\begin{aligned} 12 - (2 + 9) &= 1, \\ (12 + 2) - 9 &= 5, \\ (12 + 9) - 2 &= 19. \end{aligned}$$

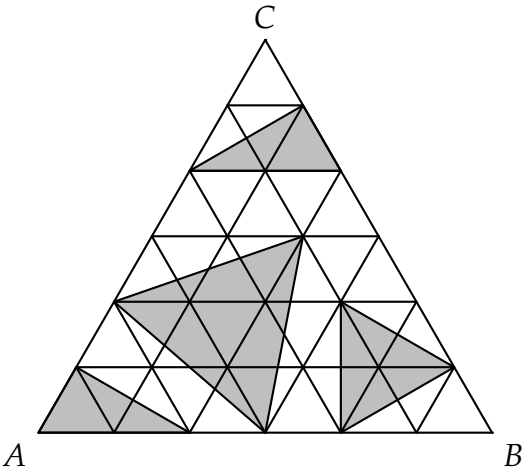
Por lo tanto, en este caso obtenemos 4 masas diferentes:

$$1\text{ kg}, \quad 5\text{ kg}, \quad 19\text{ kg}, \quad 23\text{ kg}.$$

Las masas obtenidas en los tres casos son todas diferentes. Por consiguiente, el número máximo de objetos de masas diferentes que se pueden pesar es $3 + 6 + 4 = 13$.

Respuesta: 13.

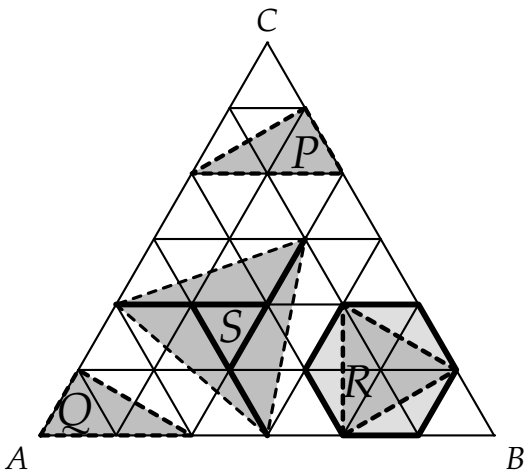
Problema 7. El triángulo equilátero ABC de la figura está formado por 36 triángulos equiláteros pequeños, cada uno de ellos con área 1. ¿Cuál es la suma de las áreas de los cuatro triángulos sombreados?



Solución. Vamos a nombrar las cuatro regiones triangulares punteadas con las letras P , Q , R y S , conforme se indica en la figura. Observe que P y Q tienen la misma área, ya que ambas regiones son triángulos con las mismas medidas de base y altura. El área de estas regiones mide:

$$\frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

pues Q es la mitad de un paralelogramo formado por cuatro triángulos menores.



Por otro lado, la región R es la parte central de un hexágono formado por seis triángulos menores, que a su vez puede comprenderse como la mitad interna de tres regiones con borde en negrita. Por lo tanto, la región R tiene un área de:

$$\frac{1}{2} \times 6 = 3.$$

Por último, note que la región S se puede dividir en cuatro regiones: un triángulo menor en el centro, y tres triángulos iguales a su alrededor, como se indica en negrita en la figura. El triángulo central tiene área 1 y los otros tres tienen área 2, pues son la mitad de un paralelogramo formado por cuatro triángulos menores. Así, el área de la región S es:

$$1 + 3 \times 2 = 7.$$

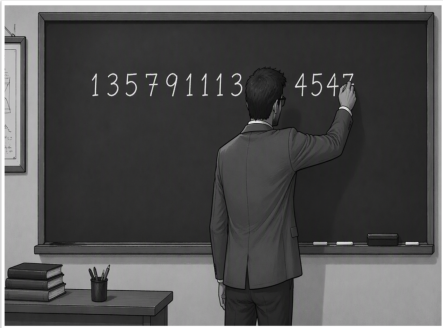
Consecuentemente, el área total sombreada es igual a $2 + 2 + 3 + 7 = 14$.

Respuesta: 14.

Problema 8. Durante una clase, un profesor escribe en la pizarra, uno a continuación del otro y sin espacios, todos los números enteros positivos impares desde 1 hasta 47. De este modo, obtiene la siguiente secuencia de 43 dígitos:

$$135791113 \dots 4547.$$

El profesor desea borrar exactamente 33 dígitos, sin cambiar el orden de los dígitos que permanezcan en la pizarra. Los 10 dígitos restantes, leídos de izquierda a derecha, formarán un número de 10 cifras. ¿Cuál es el mayor número de 10 cifras que puede obtener el profesor?



Solución. El mayor número corresponde a aquel con la mayor cantidad posible de 9 a la izquierda. Como hay cuatro 9, y a la derecha del último quedan más de 6 dígitos, los primeros cuatro dígitos son 9 (el del 9, el del 19, el del 29 y el del 39). Se Borran todos los demás dígitos. Así en el pizarón tenemos 9 9 9 9 41434547, y falta tachar dos dígitos, para lograr los mayores dígitos en las posiciones quinta y sexta hay que tachar el 1 y el 3. De este modo se obtiene el 9999444547 el mayor número de 10 dígitos.

Respuesta: 9999444547.

Clave de respuestas



1. (C) 3.
2. (D)
3. (E) 32.
4. (C) $84,0 \text{ cm} \times 118,8 \text{ cm}$.
5. 17.
6. 13.
7. 14.
8. 9999444547.

OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA
Av. Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: opmatumsa@fcpn.edu.bo
<https://opmat.fcpn.edu.bo/>