23.ª OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática

Facultad de Ciencias Puras y Naturales – Universidad Mayor de San Andrés

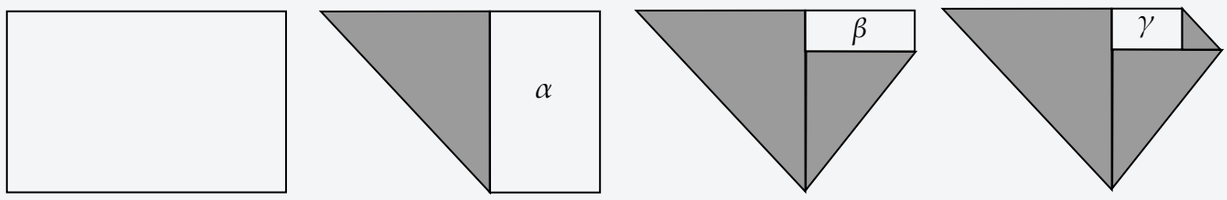
(3ro y 4to de Secundaria)

Pregunta y Solución de la Prueba Fase Final

Categoría: β

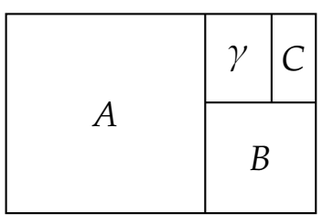
Problema 1. **Puntaje:** ☐

Una hoja rectangular de papel (blanca de un lado y gris del otro) fue doblada tres veces. En cada doblez, se pliega una esquina a 45° de modo que un lado de la hoja coincida exactamente sobre el lado adyacente, formando un cuadrado en la esquina doblada, como lo muestra la figura:



El rectángulo α, que quedó de color blanco luego del primer doblez, tiene 20 cm más de perímetro que el rectángulo β, que quedó blanco luego del segundo doblez, y este a su vez tiene 16cm más de perímetro que el rectángulo γ, que quedó blanco luego del tercer doblez. Determine el área de la hoja.

Solución. Como resultado de dobleces, la hoja rectangular queda dividida en el rectángulo γ y en tres cuadrados: A, B y C.



Sean a, b y c los lados de los cuadrados A, B y C respectivamente. El perímetro del rectángulo α es $2b+2(b+c)$, el perímetro del rectángulo β es $2b+2c$. Como el perímetro del rectángulo α tiene 20 cm más que el del rectángulo β, tenemos:

$$2b + 2(b + c) = 2b + 2c + 20,$$

es decir, $2b = 20$, luego $b = 10$. El perímetro del rectángulo γ es $2(b-c)+2c$, y como el perímetro del rectángulo β tiene 16 cm más que el del rectángulo γ:

$$2b + 2c = 2(b - c) + 2c + 16,$$

de modo que $2c = 16$, por lo que $c = 8$. La hoja rectangular tiene un lado igual a a y el opuesto igual a $b + c$, luego $a = b + c = 10 + 8 = 18$. El lado mayor de la hoja es igual a: $a + b = 18 + 10 = 28$. Finalmente, el área de la hoja es igual a: $18 \cdot 28 = 504$ cm^2.

Problema 2. **Puntaje:** ☐

Saúl escribe una lista de 11 números enteros positivos siguiendo un procedimiento específico: elige el primer número a y el segundo número b y, a partir de allí, en cada paso escribe el doble del último número menos el penúltimo. Por ejemplo, si $a = 87$ y $b = 134$, la sucesión comienza con $87, 134, 181, 228, 275, \ldots$. Determine todos los números enteros positivos a y b, con $a \leq 30$ y tales que en el lugar número 11 de la lista esté escrito 2026.

Solución. La sucesión es: a, b, $2b-a$, $2(2b-a)-b = 3b-2a$, $2(3b-2a)-(2b-a) = 4b-3a$, $\ldots$. En la posición número 11 el número de la sucesión será $10b - 9a$. Por lo tanto, debe ser: $10b - 9a = 2026$ entonces $b = \frac{2026+9a}{10} \in \mathbb{Z}$. Queremos que $2026 + 9a \equiv 0 \pmod{10}$, es decir: $6 + 9a \equiv 0 \pmod{10}$ esto es $9a \equiv 4 \pmod{10}$, lo cual implica

$$a \equiv 6 \pmod{10}.$$

Así que $a = 10k + 6$, con $0 \leq k \leq 2$, pues $a \leq 30$. Los valores posibles de a son $6, 16, 26$. Los correspondientes valores de b son:

$$\text{Si } a = 6 \quad \text{entonces} \quad b = \frac{2026 + 54}{10} = 208,$$
$$\text{Si } a = 16 \quad \text{entonces} \quad b = \frac{2026 + 144}{10} = 217,$$
$$\text{Si } a = 26 \quad \text{entonces} \quad b = \frac{2026 + 234}{10} = 226.$$

Las sucesiones correspondientes son:

- $6, 208, 410, 612, 814, 1016, 1218, 1420, 1622, 1824, 2026$;
- $16, 217, 418, 619, 820, 1021, 1222, 1423, 1624, 1825, 2026$;
- $26, 226, 426, 626, 826, 1026, 1226, 1426, 1626, 1826, 2026$.

Notemos que si x_n y x_{n+1} son dos términos consecutivos de la sucesión, entonces:

$$x_{n+1} - x_n = nb - (n-1)a - [(n-1)b - (n-2)a] = b - a.$$

Problema 3. **Puntaje:** ☐

Se colorea cada uno de los números del conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ de rojo o de azul, respetando las siguientes tres condiciones:

(i). El número 4 es rojo y existe al menos un número en S coloreado de azul.

(ii). Cualesquiera dos números $x, y \in S$ que tengan colores distintos cumplen que:

- Si $x + y \leq 8$, el número $x + y$ se colorea de azul.
- Si $x \cdot y \leq 8$, el número $x \cdot y$ se colorea de rojo.

Hallar todas las coloraciones posibles que satisfacen estas reglas.

Solución. Observemos en primer lugar que el 1 se debe colorear de azul. En efecto, si 1 es rojo y k es el número azul que el enunciado afirma que existe, resulta que $1 \cdot k = k$ es rojo, contradicción. Por lo tanto, 1 es azul.

- Supongamos que 8 es azul. Si 2 fuera azul, entonces $8 = 2 \cdot 4$ debería ser rojo, contradicción. Entonces 2 es rojo. De esto deducimos que $3 = 1 + 2$ es azul, $6 = 2 \cdot 3$ es rojo y $7 = 1 + 6$ es azul. Además sabíamos que 4 es rojo y por lo tanto $5 = 1 + 4$ es azul. La coloración es:

1	2	3	4	5	6	7	8
A	R	A	R	A	R	A	A

- Supongamos ahora que 8 es rojo. Como en el caso anterior, sabemos que 1 es azul, que 4 es rojo y que 5 es azul.
  - Si 2 es azul, tenemos que $6 = 2 + 4$ es azul. Si 3 fuera rojo, entonces $6 = 2 \cdot 3$ debería ser rojo, contradicción. Entonces 3 es azul, y por tanto $7 = 3 + 4$ es azul. En este caso, la coloración es:

1	2	3	4	5	6	7	8
A	A	A	R	A	A	A	R

  - Si 2 es rojo, entonces $3 = 1 + 2$ es azul, $6 = 2 \cdot 3$ es rojo y $7 = 1 + 6$ es azul. En este caso, la coloración es:

1	2	3	4	5	6	7	8
A	R	A	R	A	R	A	R

En conclusión, las únicas tres coloraciones posibles para $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ son:

(1)	A	R	A	R	A	R	A	A
(2)	A	A	A	R	A	A	A	R
(3)	A	R	A	R	A	R	A	R

Problema 4. **Puntaje:** ☐

En una competencia de matemática, cada participante debe elegir un conjunto de números primos distintos tales que su promedio sea 27. Determine el mayor primo posible que puede pertenecer a dicho conjunto.

Solución. Sea P un conjunto de números primos cuyo promedio es 27. Veamos en primer lugar que $2 \notin P$. En efecto, si suponemos que $2 \in P$ y denotamos por n la cantidad total de elementos de P, analizamos la paridad de la suma: si n es par, la suma de los elementos de P es impar (un número par sumado con una cantidad impar de números primos impares), lo cual contradice que dicha suma deba ser igual a $27n$ (que es un número par). Por el contrario, si n es impar, la suma de los elementos sería par, lo que contradice que $27n$ sea un número impar. Por lo tanto, $2 \notin P$, de modo que todos los elementos de P son primos impares.

Dado que 27 no es un número primo, el conjunto P debe contener al menos dos elementos. Si denotamos por q al mayor primo de P, se tiene necesariamente que $q > 27$. Para acotar superiormente el valor de q, emplearemos la siguiente propiedad:

Si a un conjunto de números con promedio a se le agregan números menores que a o se le quitan números mayores que a, el nuevo promedio será menor que a.

Si agregamos al conjunto P todos los primos p tales que $2 < p < 27$ y retiramos de P a todos los primos p tales que $27 < p < q$, obtenemos un nuevo conjunto de 9 elementos:

$$\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, q\}$$

Aplicando la propiedad anterior, el promedio de este nuevo conjunto debe ser menor o igual a 27:

$$\frac{3+5+7+11+13+17+19+23+q}{9} = \frac{98+q}{9} \leq 27$$

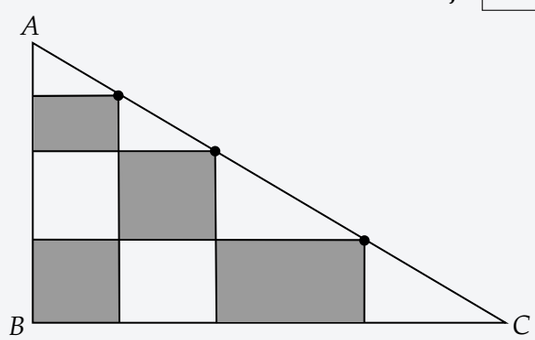
donde la igualdad se alcanza si y solo si no fue necesario agregar ni quitar ningún elemento. Al resolver esta desigualdad, obtenemos $98 + q \leq 243$ y esto implica $q \leq 145$. El mayor número primo que satisface esta desigualdad es 139 (descartando $143 = 11 \times 13$ y $141 = 3 \times 47$). Resta verificar que el valor $q = 139$ es efectivamente alcanzable. Como $145 - 139 = 6$, podemos compensar la diferencia ajustando uno de los elementos menores por otro que sea 6 unidades mayor. En particular, si reemplazamos el primo 23 por 29, conseguimos que la suma total sea exactamente 243:

$$\frac{3+5+7+11+13+17+19+29+139}{9} = \frac{243}{9} = 27$$

El conjunto de primos resultante es $P = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29, 139\}$, lo cual confirma que el mayor primo posible es 139.

Problema 5. **Puntaje:** ☐

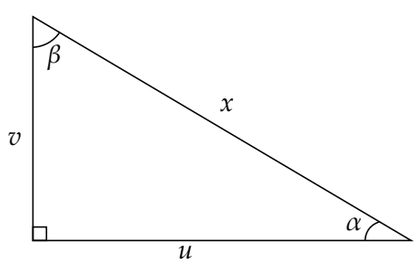
Rosa y Sara juegan con un triángulo rectángulo ABC, recto en B. Rosa comienza marcando dos puntos interiores en la hipotenusa AC, luego Sara marca un punto interior en la hipotenusa AC, distinto de los dos marcados por Rosa. A partir de estos tres puntos se trazan segmentos perpendiculares a los catetos AB y BC, formándose regiones sombreadas y no sombreadas, como se muestra en la figura.



Sara gana si el área total de la superficie sombreada es igual al área total de la superficie no sombreada; en cualquier otro caso, gana Rosa. Determine cuál de las dos jugadoras tiene una estrategia ganadora.

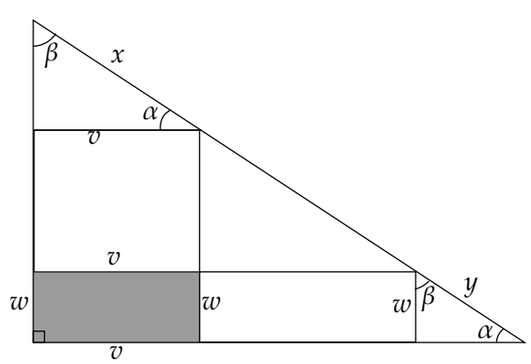
Solución. Observemos que en el triángulo rectángulo de hipotenusa x, catetos u, v y ángulos agudos α, β, el área es igual a

$$\frac{uv}{2} = \frac{x\cos\alpha \cdot x\cos\beta}{2} = \frac{x^2}{2}\cos\alpha\cos\beta.$$



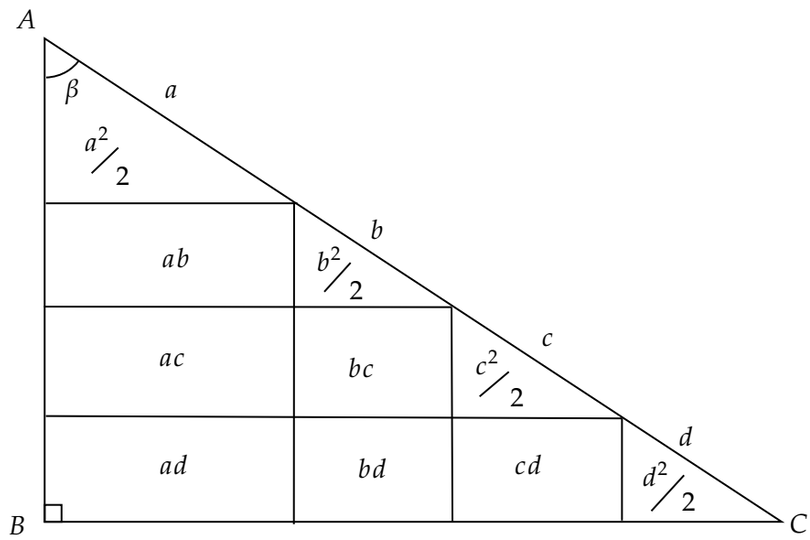
Por otra parte, en el rectángulo de lados v y w el área es igual a

$$vw = x\cos\alpha \cdot y\cos\beta = xy\cos\alpha\cos\beta.$$



Volviendo al problema, las áreas de cada triángulo y cada rectángulo que aparecen en la figura se pueden determinar en función de las longitudes de los segmentos que se forman en la hipotenusa, de la siguiente manera:

$$\frac{a^2}{2}, \quad ab, \quad \frac{b^2}{2}, \quad ac, \quad bc, \quad \frac{c^2}{2}, \quad ad, \quad bd, \quad cd, \quad \frac{d^2}{2},$$



donde todos los valores deben estar multiplicados por una misma constante (igual a $\cos\alpha\cos\beta$) que al final se cancela. Luego, si igualamos el área no sombreada y el área sombreada tenemos:

$$\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}+\frac{d^2}{2}+ac+bd=ab+ad+bc+cd,$$

$$\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}+\frac{d^2}{2}+ac+bd-ab-ad-bc-cd=0,$$

$$\frac{(a+c-b-d)^2}{2}=0.$$

Veamos que Sara siempre puede colocar el tercer punto de tal modo que $a+c=b+d$.

- **Caso 1.** Si Rosa elige el punto medio M de AC y otro punto N, entonces a Sara le basta elegir el punto simétrico de N respecto a M.
- **Caso 2.** Si Rosa elige dos puntos M y N, donde ninguno es el punto medio de AC. Supongamos que A, M, N, C están en ese orden.

  Si M y N están en lados distintos respecto del punto medio de AC, entonces Sara debe elegir el punto P en el segmento MN tal que

  $$NP=\frac{AC}{2}-AM \quad \left(P \text{ está en el interior de } MN \text{ ya que } AN>\frac{AC}{2}\right).$$

  Entonces,

  $$a+c=AM+NP=AM+\frac{AC}{2}-AM=\frac{AC}{2}.$$

  El punto medio M de DE pertenece a la base media paralela a AB. De modo que si prolongamos CM más allá de M hasta el punto X tal que $MX=CM$, el punto X que se obtiene pertenece a AB. Por construcción, $XDCE$ es un paralelogramo, pues sus diagonales se bisecan mutuamente. Como $DX \parallel AC$, tenemos $[ACD]=[ACX]$ y análogamente $[BCE]=[BCX]$, pues $EX \parallel BC$. Luego $[ACD]+[BCE]=[ABC]$, que era lo que queríamos demostrar.

  Si M y N están en el mismo lado respecto al punto medio de AC, supongamos que en el mismo lado que A, entonces Sara debe elegir el punto P en el segmento NC tal que

  $$PC=\frac{AC}{2}-MN \quad \left(P \text{ está en el interior de } NC \text{ porque } NC>\frac{AC}{2}\right).$$

  Entonces,

  $$b+d=MN+PC=MN+\frac{AC}{2}-MN=\frac{AC}{2}.$$

Por lo tanto, Sara siempre puede lograr que $a+c=b+d$, lo que garantiza que las áreas sean iguales. En consecuencia, **Sara tiene estrategia ganadora**.