



23^a OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática

Facultad de Ciencias Puras y Naturales

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS



PRIMERA FASE

Prueba de clasificación

PREGUNTAS Y SOLUCIONES

CATEGORÍA β

3^{ro} Y 4^{to} DE SECUNDARIA



Julio, 2026

Preguntas

Tiempo estimado: 70 min

Problema 1. Las cabinas de la Línea Roja del teleférico de La Paz están numeradas del 1 al 100. Wara observa pasar todas las cabinas y anota cuántas veces aparece escrito el dígito 7 en total (por ejemplo, en la cabina 77 el dígito 7 aparece dos veces). ¿Cuántas veces aparece el dígito 7?

- (A) 10 (B) 11 (C) 19 (D) 20 (E) 21

Problema 2. En una feria de Tarija, doña Amalia empaca salteñas en cajas numeradas. Una caja lleva el número de cuatro cifras $\overline{4k8k}$, donde k es un dígito. ¿Para cuántos valores de k el número $\overline{4k8k}$ es divisible por 6?

- (A) 1 (B) 8 (C) 2 (D) 4 (E) 6

Problema 3. En el centro de La Paz, las calles forman una cuadrícula. Julián debe caminar desde la plaza Murillo hasta un punto ubicado 4 cuadras al este y 4 cuadras al sur, moviéndose únicamente hacia el este o hacia el sur en cada cuadra. En su trayecto quiere pasar sí o sí por el mercado Lanza, que se encuentra exactamente a 2 cuadras al este y 2 cuadras al sur de la plaza Murillo. ¿Cuántas rutas distintas puede seguir?

- (A) 16 (B) 24 (C) 36 (D) 60 (E) 72

Problema 4. Calcular el valor de la suma

$$S = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{19 \times 21}.$$

- (A) $\frac{9}{19}$ (B) $\frac{10}{21}$ (C) $\frac{20}{21}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{21}{40}$

Problema 5. Un aguayo tiene forma de cuadrado $ABCD$ de lado 6. Sea M el punto medio del lado AB y N el punto medio del lado BC . Se borda el triángulo DMN . ¿Cuál es el área de la región bordada?

- (A) 24 (B) $\frac{27}{2}$ (C) 54 (D) 15 (E) $\frac{27}{8}$

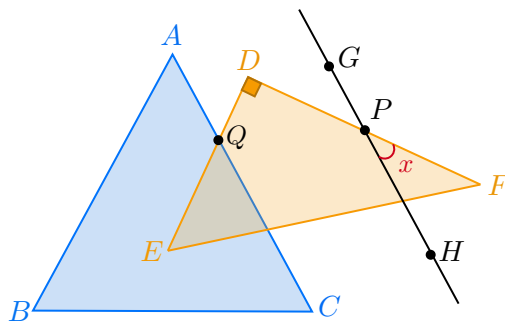
Problema 6. Un agricultor cosechó muchas cabeza de lechuga y quiso saber cuántas tenía en total. Para asegurarse, pidió ayuda a cuatro de sus trabajadores, quienes decidieron contarlas de distintas maneras. El primer trabajador formó grupos de 11 cabezas, pero al final le faltaba una cabeza de lechuga para completar el último grupo. El segundo trabajador hizo grupos de 13 cabezas y le sobraron 12 cabezas. El tercer trabajador formó grupos de 7 cabezas y también le faltaba una cabeza para completar el último grupo. Finalmente, el cuarto trabajador organizó las cabezas en grupos de 12 y logró hacerlo sin que sobrara ni faltara ninguna. Sabiendo que el agricultor cosechó menos de 8000 cabezas, ¿cuántas cabezas de lechuga cosechó en total?

- (A) 2502 (B) 5006 (C) 4800 (D) 3000 (E) 5004

Problema 7. La cantidad de segundos que hay en una hora y media se puede expresar como $3^a \cdot 4^b \cdot 5^c \cdot 6^d$, donde a, b, c y d son enteros positivos. Calcule el valor de: $a + b + c + d$.

- (A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Problema 8. En la Figura, el triángulo ABC cumple $AB = AC$ y el triángulo DEF tiene un ángulo recto en D . Los puntos G, P y H son colineales; P está sobre el lado DF y Q es el punto donde la recta DE corta al lado AC . Se sabe que $DE \parallel AB$, $GH \parallel AC$ y $m\angle BCA = 70^\circ$. Determine la medida del ángulo $x = m\angle FPH$.



- (A) 60° (B) 50° (C) 70° (D) 75° (E) 100°

Problema 9. Durante la Feria Internacional del Libro en el Campo Ferial Chuquiago Marka de la ciudad de La Paz, un grupo de 72 estudiantes participa en una fotografía. Para organizarse, se acomodan formando un arreglo rectangular de 8 filas y 9 columnas. Antes de tomar la fotografía, cada estudiante saluda con un apretón de manos a todos sus vecinos. Dos estudiantes se consideran vecinos si ocupan posiciones contiguas horizontal, vertical o diagonalmente. ¿Cuántos apretones de manos se realizan en total?

- (A) 239 (B) 224 (C) 356 (D) 286 (E) 478

Problema 10. En el altiplano de La Paz, don Fermín quiere cercar un terreno rectangular de exactamente 2024 m^2 para cultivar papa. Las longitudes de los lados deben ser números enteros de metros y, para que los surcos de riego encajen, ambos lados deben ser *pares*. ¿Cuántos terrenos rectangulares distintos puede cercar don Fermín? (Dos terrenos se consideran iguales si tienen las mismas dimensiones, sin importar la orientación.)

- (A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 4 (E) 6

Problema 11. Sobre una mesa hay 2026 piedritas recogidas a orillas del lago Titicaca. Tupak y Killa juegan por turnos: en cada turno, el jugador debe retirar 1, 2 o 3 piedritas, y gana quien retira la última piedrita. Tupak juega primero y ambos juegan de manera *perfecta*; es decir, cada jugador elige siempre la jugada que más

le conviene: si existe una estrategia que le garantiza ganar, la sigue sin equivocarse. ¿Cuántas piedritas debe retirar Tupak en su primer turno para garantizar su victoria?

- (A) 2 (B) 4 (C) 1 (D) 5 (E) 3

Problema 12. ¿Cuántos números de tres cifras tienen sus dígitos en progresión aritmética estrictamente creciente? (Por ejemplo, 246 cumple la condición porque $2 < 4 < 6$ y $4 - 2 = 6 - 4$.)

- (A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

Soluciones

Solución. (del Problema 1) Contamos por posición. El 7 aparece en la cifra de las *unidades* en los números 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97: son 10 apariciones. Aparece en la cifra de las *decenas* en los números 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79: otras 10 apariciones. El número 100 no aporta ningún 7. Nótese que el 77 contribuye una vez a cada conteo, y eso es correcto porque contamos *apariciones* del dígito, no números que lo contienen. En total:

$$10 + 10 = 20$$

Respuesta. 20 (Opción: D.)

Solución. (del Problema 2) Un número es divisible por 6 si y sólo si es divisible por 2 y por 3.

- *Divisibilidad por 2:* la última cifra es k , así que $k \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
- *Divisibilidad por 3:* la suma de cifras es $4 + k + 8 + k = 12 + 2k$. Como 12 es múltiplo de 3, se necesita que $2k$ sea múltiplo de 3, es decir, $k \in \{0, 3, 6, 9\}$.

La intersección de ambas condiciones es $k \in \{0, 6\}$. Verificación: $4080 = 6 \times 680$ y $4686 = 6 \times 781$. Por lo tanto hay exactamente 2 valores.

Respuesta. 2 (Opción: C.)

Solución. (del Problema 3) Todo camino de la plaza Murillo al destino que pasa por el mercado Lanza se descompone en dos tramos independientes:

- *Plaza Murillo $\rightarrow$ mercado Lanza:* se requieren 2 movimientos al este y 2 al sur, en algún orden. El número de caminos es $\binom{4}{2} = 6$.
- *Mercado Lanza $\rightarrow$ destino:* nuevamente 2 al este y 2 al sur, es decir, $\binom{4}{2} = 6$ caminos.

Por el principio multiplicativo, el total es

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 6 \times 6 = 36.$$

(Como control: sin la restricción habría $\binom{8}{4} = 70$ caminos, así que 36 es coherente.)

Respuesta. 36 (Opción: C.)

Solución. (del Problema 4) Usamos la descomposición en fracciones parciales

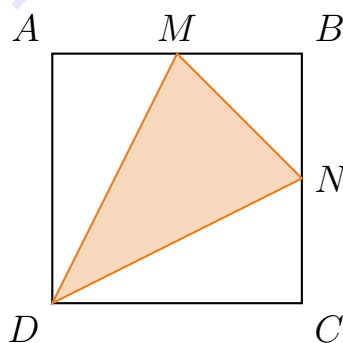
$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right).$$

La suma tiene 10 términos ($k = 1, 2, \dots, 10$) y es telescópica:

$$S = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21}\right) \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{21}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{21} = \frac{10}{21}.$$

Respuesta. $\frac{10}{21}$ (Opción: B.)

Solución. (del Problema 5) Colocamos coordenadas: $D = (0, 0)$, $C = (6, 0)$, $B = (6, 6)$, $A = (0, 6)$. Entonces M , punto medio de AB , es $(3, 6)$ y N , punto medio de BC , es $(6, 3)$.



Restamos del área del cuadrado las áreas de los tres triángulos rectángulos exteriores a DMN :

$$[ADM] = \frac{6 \times 3}{2} = 9, \quad [MBN] = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}, \quad [NCD] = \frac{3 \times 6}{2} = 9.$$

Por lo tanto,

$$[DMN] = 36 - 9 - \frac{9}{2} - 9 = \frac{27}{2}.$$

(Comprobación con la fórmula del área por coordenadas: $\frac{1}{2} |3 \cdot 3 - 6 \cdot 6| = \frac{27}{2}$.)

Respuesta. $\frac{27}{2}$ (Opción: B.)
--

Solución. (del Problema 6)

Interpretamos las diferentes formas de contar de los trabajadores :

Primer trabajador $n = 11a - 1$ entonces 11 divide a $n + 1$.

Segundo trabajador $n = 13b - 1$ entonces 13 divide a $n + 1$.

Tercer trabajador $n = 7c - 1$ entonces 7 divide a $n + 1$.

Cuarto trabajador $n = 12d$.

Sabiendo que 11, 13 y 7 son primos distintos, por tanto coprimos dos a dos. Entonces se cumple una propiedad importante: *Si varios números son coprimos entre sí y todos dividen a un número, entonces su producto también lo divide.* Utilizando esta propiedad tenemos que $11 \cdot 13 \cdot 7 = 1001$ divide a $n + 1$, esto significa que existe t tal que $n + 1 = 1001 \cdot t$ equivalente a $n = 1001 \cdot t - 1$. Hasta aquí se cumple las tres primeras afirmaciones, debemos buscar un número que cumpla la cuarta afirmación, es decir que sea múltiplo de 12 para eso hacemos el siguiente análisis:

Si $t = 1 \Rightarrow n = 1000$ $\times$	Si $t = 5 \Rightarrow n = 5004 = 12 \cdot 417$ $\checkmark$
Si $t = 2 \Rightarrow n = 2001$ $\times$	Si $t = 6 \Rightarrow n = 6005$ $\times$
Si $t = 3 \Rightarrow n = 3002$ $\times$	Si $t = 7 \Rightarrow n = 7006$ $\times$
Si $t = 4 \Rightarrow n = 4003$ $\times$	Si $t = 8 \Rightarrow n = 8007$ $\times$

cuando $t = 5$, se cumple las cuatro afirmaciones, además de ser menor a 8000 cabezas de lechuga. Así, el único valor de $n < 8000$ que verifica las cuatro condiciones establecidas es $n = 5004$. Por consiguiente, el agricultor cosechó 5004 cabezas de lechuga.

suma de los ángulos interiores es 180° . Así, $m\angle IPD = 180^\circ - 40^\circ - 90^\circ = 50^\circ$. Finalmente, el ángulo x es opuesto por el vértice al ángulo $\angle IPD$, por lo que ambos tienen la misma medida. En consecuencia, $x = 50^\circ$.

Respuesta. $x = 50^\circ$. (Opción: B.)

Solución. (del Problema 9) Contaremos los saludos según la posición de cada estudiante. Los 4 estudiantes ubicados en las esquinas tienen únicamente 3 vecinos, por lo que realizan $4 \cdot 3$ saludos. Los estudiantes que están en los bordes, pero no en las esquinas, son $2(8 - 2) + 2(9 - 2) = 12 + 14 = 26$, y cada uno tiene 5 vecinos. En total realizan $26 \cdot 5$ saludos. Finalmente, los estudiantes del interior son $(8 - 2)(9 - 2) = 6 \cdot 7 = 42$, y cada uno tiene 8 vecinos. En total realizan $42 \cdot 8$ saludos.

Al sumar estos valores, cada apretón de manos se ha contado dos veces (una por cada estudiante involucrado). Por tanto, el número total de saludos es

$$\frac{4 \cdot 3 + 26 \cdot 5 + 42 \cdot 8}{2} = \frac{12 + 130 + 336}{2} = \frac{478}{2} = 239.$$

Contemos los apretones de manos según la posición de cada estudiante. Los 4 estudiantes ubicados en las esquinas tienen exactamente 3 vecinos cada uno, por lo que aportan $4 \cdot 3$ saludos. Los estudiantes situados en los bordes, excluyendo las esquinas, son $2(8 - 2) + 2(9 - 2) = 12 + 14 = 26$, y cada uno tiene 5 vecinos. En consecuencia, aportan $26 \cdot 5$ saludos. Finalmente, los estudiantes del interior son $(8 - 2)(9 - 2) = 6 \cdot 7 = 42$, y cada uno tiene 8 vecinos. Por lo tanto, aportan $42 \cdot 8$ saludos. Al sumar estas cantidades, cada apretón de manos se ha contado dos veces, una por cada estudiante que participa en él. Por ello, el número total de apretones de manos es

$$\frac{4 \cdot 3 + 26 \cdot 5 + 42 \cdot 8}{2} = \frac{12 + 130 + 336}{2} = \frac{478}{2} = 239.$$

En consecuencia, el número total de apretones de manos es 239.

Respuesta. 239 (Opción: A.)

Solución. (del Problema 10) Sean a y b los lados del terreno, con $a \leq b$, $ab = 2024$ y ambos pares. Escribimos $a = 2m$ y $b = 2n$ con $m \leq n$ enteros positivos; entonces

$$4mn = 2024 \implies mn = 506 = 2 \times 11 \times 23.$$

Como 506 tiene $2^3 = 8$ divisores, a saber 1, 2, 11, 22, 23, 46, 253, 506, las parejas (m, n) con $m \leq n$ y $mn = 506$ son:

$$(1, 506), \quad (2, 253), \quad (11, 46), \quad (22, 23).$$

(Nótese que 506 no es un cuadrado perfecto, así que no hay pareja con $m = n$.) Cada una produce un terreno de lados pares:

$$2 \times 1012, \quad 4 \times 506, \quad 22 \times 92, \quad 44 \times 46.$$

Verificación de la última: $44 \times 46 = 2024$. Por lo tanto, don Fermín puede cercar exactamente 4 terrenos distintos.

Respuesta. 4 (Opción: D.)

Solución. (del Problema 11) Analizamos las *posiciones perdedoras* (aquellas en las que el jugador que debe mover pierde con juego perfecto). Si quedan 0 piedritas, el jugador en turno ya perdió (el rival tomó la última). Desde 1, 2 o 3 piedritas se gana tomándolas todas. Desde 4, cualquier jugada deja 1, 2 o 3 al rival, que gana: 4 es perdedora. Por inducción, las posiciones perdedoras son exactamente los *múltiplos de 4*: desde un múltiplo de 4 toda jugada lleva a un no-múltiplo, y desde un no-múltiplo siempre se puede retirar 1, 2 o 3 para dejar un múltiplo de 4.

Como $2026 = 4 \times 506 + 2$, la posición inicial no es múltiplo de 4: Tupak gana retirando 2 piedritas, dejando 2024 (múltiplo de 4). Luego, en cada turno, si Killa

retira r piedritas, Tupak retira $4 - r$, manteniendo siempre un múltiplo de 4 hasta tomar él la última.

Respuesta. 2 (Opción: A.)

Solución. (del Problema 12) Sea $\overline{abc}$ el número, con dígitos $a < b < c$ en progresión aritmética de diferencia $d \geq 1$. Entonces $b = a + d$ y $c = a + 2d$, con las restricciones $a \geq 1$ (primera cifra) y $a + 2d \leq 9$. Contamos según d :

- $d = 1$: $a \leq 7$, es decir, $a \in \{1, \dots, 7\}$: 7 números (123, 234, ..., 789).
- $d = 2$: $a \leq 5$: 5 números (135, 246, 357, 468, 579).
- $d = 3$: $a \leq 3$: 3 números (147, 258, 369).
- $d = 4$: $a \leq 1$: 1 número (159).

Para $d \geq 5$ se tendría $a + 2d \geq 11 > 9$, imposible. El total es

$$7 + 5 + 3 + 1 = 16.$$

Respuesta. 16 (Opción: C.)

Clave de respuestas

1. (D) 20
2. (C) 2
3. (C) 36
4. (B) $\frac{10}{21}$
5. (B) $\frac{27}{2}$
6. (E) 5004
7. (C) 6
8. (B) 50°
9. (A) 239
10. (D) 4
11. (A) 2
12. (C) 16

OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA
Av. Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: opmatumsa@fcpn.edu.bo
<https://opmat.fcpn.edu.bo/>