



23.a OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática
Facultad de Ciencias Puras y Naturales – Universidad Mayor de San Andrés



(3^{ro} y 4^{to} de Secundaria)

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA – FASE 2

Categoría: β

Parte I: Preguntas de Opciones Múltiples

Problema 1. Sean a, b y c números reales que satisfacen $a + b + c = 0$ y $abc = -810$. Determine el valor de $(a + b)^3 + (b + c)^3 + (c + a)^3$.

- (A) -2430 (B) -810 (C) 810 (D) 2430 (E) 7290

Solución. De la condición $a + b + c = 0$ se obtiene directamente que $a + b = -c, b + c = -a, c + a = -b$. Por otra parte, utilizamos la identidad algebraica

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

Como $a + b + c = 0$, resulta que $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Puesto que $abc = -810$, tenemos

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3(-810) = -2430.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} (a + b)^3 + (b + c)^3 + (c + a)^3 &= (-c)^3 + (-a)^3 + (-b)^3 \\ &= -(a^3 + b^3 + c^3) \\ &= -(-2430) \\ &= 2430. \end{aligned}$$

Respuesta: (D) 2430

Problema 2. Sea *OPEMAT* un número natural de seis dígitos divisible por 11. ¿Cuál de los siguientes números enteros es necesariamente divisible por 11?

- (A) *TAMEPO* (B) *EPMATO* (C) *MATEOP* (D) *EPOTMA* (E) Ninguno

Solución. Recordemos el criterio de divisibilidad por 11: un número entero es divisible por 11 si y solo si la diferencia entre la suma de sus dígitos de posición alternada es un múltiplo de 11. Como el número *OPEMAT* es divisible por 11, se cumple que

$$O - P + E - M + A - T \equiv 0 \pmod{11}.$$

Equivalentemente,

$$T - A + M - E + P - O \equiv 0 \pmod{11},$$

pues $T - A + M - E + P - O = -(O - P + E - M + A - T)$. Consideremos ahora el número *TAMEPO*. Aplicando nuevamente el criterio de divisibilidad por 11, obtenemos $T - A + M - E + P - O$. Como acabamos de demostrar que esta expresión es un múltiplo de 11, se concluye que

$$TAMEPO \equiv 0 \pmod{11}.$$

Por lo tanto, el número que necesariamente es divisible por 11 es *TAMEPO*.

Respuesta: (A) *TAMEPO*

Problema 3. Se dispone de una bolsa con 2 kg de arroz, una balanza de dos platillos y dos pesas: una de 20 g y otra de 50 g. Elabore una estrategia de tal forma que el número de pesadas sea el mínimo para separar exactamente 110 g de arroz. ¿Cuál es el número mínimo de pesadas requeridas?

Nota: Una *pesada* consiste en una única operación de equilibrio de la balanza.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) no es posible

Solución. Demostraremos que el número mínimo de pesadas requeridas es 2. En primer lugar, observamos que en una sola pesada (usando únicamente las pesas de 20 g y 50 g) solo es posible medir directamente masas de arroz de 20 g, 30 g ($50 - 20$), 50 g o 70 g ($50 + 20$). Como ninguna de estas cantidades es 110 g, es imposible lograr el objetivo en una sola pesada.

A continuación, mostramos un procedimiento para obtener exactamente 110 g en 2 pesadas:

Primera pesada: Colocamos ambas pesas (50 g y 20 g) en un platillo de la balanza. En el otro platillo vertemos arroz hasta lograr el equilibrio:

Platillo A: 50 g (pesa) + 20 g (pesa) $\iff$ Platillo B: 70 g (arroz).

De este modo, obtenemos un primer lote de 70 g de arroz.



Segunda pesada: Para completar los 110 g deseados, nos faltan $110\text{ g} - 70\text{ g} = 40\text{ g}$ de arroz. Aprovechamos el arroz obtenido en el paso anterior y distribuimos los elementos de la siguiente manera:

- En el platillo izquierdo colocamos la pesa de 20 g junto con los 70 g de arroz pesados previamente (sumando una masa de 90 g).
- En el platillo derecho colocamos la pesa de 50 g y vertemos arroz nuevo hasta equilibrar la balanza.



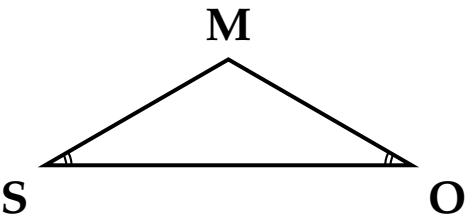
La condición de equilibrio viene dada por: $20\text{ g (pesa)} + 70\text{ g (arroz)} = 50\text{ g (pesa)} + x\text{ (arroz nuevo)}$, de donde despejamos la nueva cantidad de arroz: $x\text{ } 90\text{ g} = 50\text{ g} + x \implies x = 40\text{ g}$ de arroz. Finalmente, al juntar la cantidad obtenida en la primera pesada (70 g) con la obtenida en la segunda pesada (40 g), reunimos exactamente:

$70\text{ g} + 40\text{ g} = 110\text{ g}$ de arroz.

Por lo tanto, se necesitan como mínimo **2 pesadas**.

Respuesta: (B) 2

Problema 4. Las zonas de Obrajes (O), Miraflores (M) y Sopocachi (S) se ubican en un mapa como se muestra en la figura. Una empresa de telecomunicaciones decide construir una nueva antena satelital para mejorar la señal de internet en estas tres zonas de la Ciudad de La Paz. La distancia entre S y O es de $8\sqrt{3}$ km; la distancia entre M y S es de 8 km; la distancia entre M y O es de 8 km. Determine el **radio mínimo de cobertura** que debe tener la antena para alcanzar simultáneamente las tres zonas.



- (A) $8\sqrt{3}$ km
- (B) $4\sqrt{2}$ km
- (C) $4\sqrt{3}$ km
- (D) $4\sqrt{5}$ km
- (E) 8 km

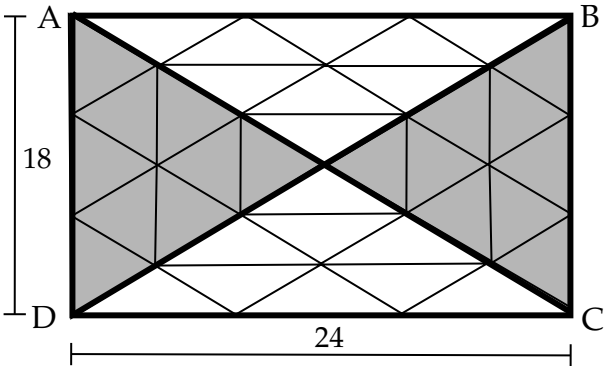
Solución. La mayor distancia entre dos de las tres zonas es $SO = 8\sqrt{3}$ km. Por lo tanto, cualquier antena que tenga cobertura simultánea de S y O debe tener un radio de al menos la mitad de esta distancia. En consecuencia,

$$r \geq \frac{SO}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ km}$$

Ahora demostraremos que este radio es suficiente para cubrir también la zona M . Como $SM = MO = 8$ km, el triángulo SMO es isósceles. Sea P el punto medio del segmento SO . En un triángulo isósceles, la mediana trazada desde el vértice M es también perpendicular a la base SO . Por tanto, el triángulo SMP es rectángulo y $SP = \frac{SO}{2} = 4\sqrt{3}$ km. Aplicando el teorema de Pitágoras, $MP^2 = SM^2 - SP^2 = 8^2 - (4\sqrt{3})^2 = 64 - 48 = 16$, de donde $MP = 4$ km. Así, si colocamos la antena en el punto P , su distancia a las zonas S y O es $4\sqrt{3}$ km, mientras que su distancia a M es 4 km. Por consiguiente, una antena con radio $r = 4\sqrt{3}$ km alcanza las tres zonas. Como ya vimos que ningún radio menor que $4\sqrt{3}$ km puede cubrir simultáneamente (S) y (O) , concluimos que el radio mínimo es $4\sqrt{3}$ km.

Respuesta: (C) $4\sqrt{3}$ km

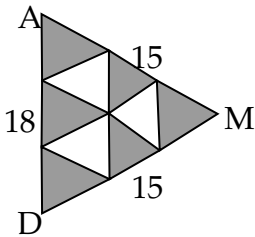
Problema 5. En el rectángulo $ABCD$, de dimensiones 18×24 , se trazan las diagonales AC y BD , junto con otros segmentos de recta, de manera que el rectángulo queda dividido en 36 triángulos pequeños, de tal manera que los triángulo grises son congruentes entre si y los triángulos blancos también son congruentes entre si, como se muestra en la figura. Determine la suma de los perímetros de un triángulo pequeño gris con un triángulo pequeño blanco.



- (A) 30 (B) 32 (C) 34 (D) 36 (E) 38

Solución. Por el Teorema de Pitágoras, la diagonal del rectángulo mide: $AC = \sqrt{18^2 + 24^2} = 30$ Las diagonales se cortan en su punto medio M , por lo que $AM = BM = CM = DM = 15$. El rectángulo queda dividido por sus diagonales en cuatro triángulos grandes cuyas regiones están compuestas por 9 triángulos pequeños.

- **Primer grupo (triángulos laterales AMD y BMC):** Consideremos el triángulo AMD , donde M es el centro del rectángulo. Esta región está formada por exactamente 9 triángulos pequeños cada uno con perímetro P . Como M es el punto medio de las diagonales, se tiene $AM = DM = \frac{30}{2} = 15$. En consecuencia, el perímetro del triángulo AMD es $18 + 15 + 15 = 48$. Ahora coloreamos alternadamente los nueve triángulos pequeños, obteniendo seis triángulos grises y tres blancos, como se muestra en la siguiente figura.



Al calcular la diferencia entre la suma de los perímetros de los triángulos grises y la de los blancos, todos los segmentos interiores se cancelan, únicamente permanece el contorno exterior del triángulo AMD . Por tanto, $6P - 3P = 3P = 48$, así el perímetro de cada triángulo pequeño de este grupo es 16.

- **Segundo grupo (triángulos superior e inferior ABM y CMD):** Con el análisis anterior se tiene que el perímetro de cada triángulo pequeño en el segundo grupo es de 18

Por lo tanto, la suma de los dos perímetros es: $16 + 18 = 34$.

Respuesta: (C) 34

Parte II: Preguntas de Respuesta Corta

Problema 6. Un número entero positivo es **semiprimo** si es producto de exactamente dos números primos, no necesariamente distintos. Un número es **emiprimo** si es semiprimo y su reverso también es semiprimo. Por ejemplo, $183 = 3 \cdot 61$ es un emiprimo, pues su reverso $381 = 3 \cdot 127$ también es semiprimo. Determine el **menor emiprimo de tres dígitos** cuya suma de dígitos sea igual a 15.

Solución. Sea $N = \overline{abc}$ un número de tres dígitos cuya suma de dígitos es 15. Entonces $a + b + c = 15$. Para encontrar el menor número posible, debemos minimizar primero el dígito de las centenas. Como N tiene tres dígitos, $a \geq 1$. Si $a \geq 2$, entonces $N \geq 200 > 159$. Por lo tanto, para obtener un número menor que 200, necesariamente $a = 1$.

En este caso, $b + c = 14$. Como c es un dígito, tenemos $c \leq 9$. Por tanto, $b = 14 - c \geq 14 - 9 = 5$. Así, el menor valor posible de b es 5. Si $b = 5$, entonces $c = 9$, y obtenemos el número $N = 159$. Esto demuestra que 159 es el menor número de tres dígitos cuya suma de dígitos es 15.

Solo falta verificar que 159 es un emiprimo. Tenemos $159 = 3 \cdot 53$, donde 3 y 53 son primos. Por lo tanto, 159 es semiprimo. Su reverso es $951 = 3 \cdot 317$, y 3 y 317 también son primos. Por consiguiente, 951 es semiprimo y, por definición, 159 es un emiprimo. Por lo tanto, el menor emiprimo de tres dígitos cuya suma de dígitos es 15 es 159.

Respuesta: 159.

Problema 7. Determinar el dígito de la unidad en el resultado de la siguiente sumatoria:

$$S = 1^{2026} + 2^{2026} + 3^{2026} + \dots + 2026^{2026}.$$

Solución. Para encontrar el dígito de las unidades de S , basta calcular el valor de S en congruencia módulo 10.

Observamos primero el comportamiento de las potencias $d^{2026} \pmod{10}$ para cada uno de los dígitos posibles $d \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Dado que $2026 = 4k + 2$ para $k = 506$:

- Para $d \in \{0, 1, 5, 6\}$, la última cifra se mantiene constante: $d^n \equiv d \pmod{10}$.
- Para $d \in \{4, 9\}$, el período del último dígito es 2. Como el exponente 2026 es par, $4^{2026} \equiv 6 \pmod{10}$ y $9^{2026} \equiv 1 \pmod{10}$.
- Para $d \in \{2, 3, 7, 8\}$, el período del último dígito es 4. Como $2026 \equiv 2 \pmod{4}$, el término equivale a evaluar al cuadrado: $2^{2026} \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{10}$, $3^{2026} \equiv 3^2 \equiv 9 \pmod{10}$, $7^{2026} \equiv 7^2 \equiv 9 \pmod{10}$ y $8^{2026} \equiv 8^2 \equiv 4 \pmod{10}$.

Resumiendo los residuos módulo 10 para cada dígito final d :

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$d^{2026} \pmod{10}$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

La suma de los residuos en un bloque completo de 10 enteros consecutivos es:

$$0 + 1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 + 9 + 4 + 1 = 45 \equiv 5 \pmod{10}.$$

El conjunto de índices $\{1, 2, \dots, 2026\}$ se compone de 202 bloques completos de 10 números consecutivos y 6 términos adicionales correspondientes a los enteros terminados en 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} S &\equiv 202 \cdot 45 + (1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6) \pmod{10} \\ S &\equiv 202 \cdot 5 + 31 \pmod{10} \\ S &\equiv 0 + 1 \equiv 1 \pmod{10}. \end{aligned}$$

En conclusión, el dígito de las unidades de S es 1.

Respuesta: 1.

Problema 8. Determine el único número natural n para el cual los tres números $3n - 4$, $4n - 5$ y $5n - 3$ son simultáneamente números primos.

Solución. Si $n = 1$, entonces $3n - 4 = -1$, no es primo. Por lo tanto, necesariamente $n \geq 2$. Para $n \geq 2$, se tiene $(4n - 5) - (3n - 4) = n - 1 > 0$ y $(5n - 3) - (4n - 5) = n + 2 > 0$. En consecuencia, $3n - 4 < 4n - 5 < 5n - 3$. Por tanto, $3n - 4$ es el menor de los tres números. Recordemos que el único número primo par es 2; por lo tanto, todo número primo distinto de 2 es impar. Consideremos la suma de los tres números: $(3n - 4) + (4n - 5) + (5n - 3) = 12n - 12 = 2(6n - 6)$. Esta suma es par. Si los tres números fueran primos, no podrían ser todos impares, pues la suma de tres números impares es impar. Por lo tanto, al menos uno de ellos debe ser par. Como los tres números son primos, ese número par necesariamente debe ser igual a 2. Ahora bien, para $n \geq 2$, $(4n - 5) - (3n - 4) = n - 1 > 0$ y $(5n - 3) - (4n - 5) = n + 2 > 0$. Por consiguiente, $3n - 4 < 4n - 5 < 5n - 3$. Así, el menor de los tres números es $3n - 4$. Como uno de ellos debe ser igual a 2, necesariamente $3n - 4 = 2$. De donde $3n = 6$ implica $n = 2$. Finalmente, verificamos que para $n = 2$ se obtiene

$$3(2) - 4 = 2, \qquad 4(2) - 5 = 3, \qquad 5(2) - 3 = 7$$

y $\{2, 3, 7\}$ son números primos. Por lo tanto, el único número natural que satisface las condiciones es $n = 2$.

Respuesta: 2.

Problema 9. Sean a, b, c, d cuatro números enteros positivos que satisfacen $a < b < c < d$, tales que el máximo común divisor de cualesquiera dos de ellos es mayor que 1, mientras que $\text{MCD}(a, b, c, d) = 1$. Determine el menor valor posible de d . Donde MCD es el Máximo Común Divisor.

Solución. Demostraremos primero que ninguno de los números a, b, c, d puede ser una potencia de un único número primo. En efecto, supongamos que uno de ellos, por ejemplo a , es de la forma $a = p^k$, donde p es primo y $k \geq 1$. Como el máximo común divisor de a con cada uno de los otros tres números es mayor que 1, necesariamente p divide a b, c y d . Por lo tanto,

$$p \mid a, \qquad p \mid b, \qquad p \mid c, \qquad p \mid d,$$

lo que implica $p \mid \text{MCD}(a, b, c, d)$, contradiciendo la hipótesis $\text{MCD}(a, b, c, d) = 1$. Así, cada uno de los números a, b, c, d debe poseer al menos dos factores primos distintos. Por otro lado, no pueden ser todos pares, pues en ese caso

$$2 \mid a, \qquad 2 \mid b, \qquad 2 \mid c, \qquad 2 \mid d,$$

y nuevamente tendríamos $\text{MCD}(a, b, c, d) \geq 2$, lo cual es imposible. Por consiguiente, al menos uno de los cuatro números es impar. El menor número entero positivo impar que posee al menos dos factores primos distintos es

$$15 = 3 \cdot 5.$$

Por tanto, alguno de a, b, c, d debe ser, como mínimo, 15. Como $a < b < c < d$, se sigue necesariamente que $d \geq 15$. Finalmente, mostraremos que este valor puede alcanzarse. Consideremos $(a, b, c, d) = (6, 10, 12, 15)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \text{MCD}(6, 10) &= 2, & \text{MCD}(6, 12) &= 6, & \text{MCD}(6, 15) &= 3, \\ \text{MCD}(10, 12) &= 2, & \text{MCD}(10, 15) &= 5, & \text{MCD}(12, 15) &= 3, \end{aligned}$$

por lo que el máximo común divisor de cualesquiera dos de estos números es mayor que 1. Además,

$$\text{MCD}(6, 10, 12, 15) = 1.$$

Por lo tanto, $d = 15$ es alcanzable y, junto con la cota inferior obtenida anteriormente (significa que d no puede ser menor que 15, es decir que 15 es la cota inferior), concluimos que el menor valor posible es 15.

Respuesta: 15.

Problema 10. Hay 20 puntos alineados, separados por una misma distancia:



Miguel tiene que pintar de rojo tres o más de estos puntos, de manera tal que los puntos rojos estén separados por una misma distancia y no sea posible pintar ningún punto adicional. Determinar de cuántas maneras Miguel puede hacer su tarea.

Solución. 1: Numeramos los puntos de izquierda a derecha, de 1 a 20. Si d es la distancia entre puntos rojos consecutivos, el primer punto rojo esta en una posición menor o igual que d (para que no se pueda agregar un punto rojo antes). Por otra parte, si el primer punto rojo es x , también son rojos $x + d$ y $x + 2d$, de modo que $1 + 2d \leq 20$, y tenemos $1 \leq d \leq 9$.

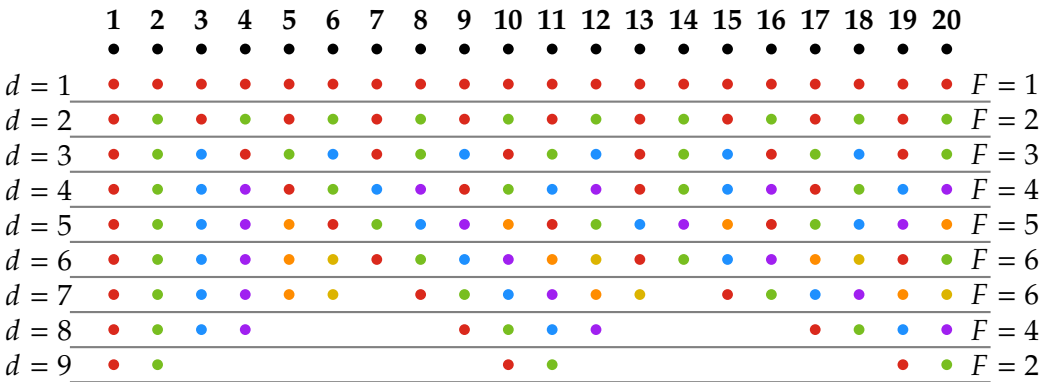
Para las distancias d menores o iguales que 6 hay d maneras de elegir los puntos, según el primer punto marcado sea $1, 2, \dots, d$ pues todos satisfacen la condición $x + 2d \leq 20$. Para las distancias mayores que 6, como hay que marcar al menos tres puntos, la posición x del primer punto debe verificar $x + 2d \leq 20$, o sea $x \leq 20 - 2d$. Hay $20 - 2d$ elecciones para cada d entre 7 y 9. En total son

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + (20 - 14) + (20 - 16) + (20 - 18) = 33$ posibilidades.

Solución. 2: Hay 20 puntos alineados, separados por una misma distancia. La variable d representa la distancia entre los puntos pintados de rojo y F representa la cantidad de formas distintas en las que se pueden colorear respetando las condiciones del problema:

- a) Se deben pintar **tres o más puntos**.
- b) La distancia entre puntos rojos consecutivos es constante d .
- c) Es **imposible pintar de rojo más al principio o al final** de la secuencia (la secuencia de puntos rojos es máxima dentro del rango de los 20 puntos).

En la figura a continuación, cada fila representa las secuencias válidas para una distancia d . Los puntos pintados de distinto color representan formas F diferentes e independientes de colorear los puntos con la misma distancia d :



Respuesta: 33.

Clave de respuestas



1. (D) 2430.
2. (A) TAMEPO.
3. (B) 2.
4. (C) $4\sqrt{3}$ km.
5. (C) 34.
6. 159.
7. 1.
8. 2.
9. 15.
10. 33.

OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA
Av. Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: opmatumsa@fcpn.edu.bo

<https://opmat.fcpn.edu.bo/>