23.ª OLIMPIADA PACEÑA DE MATEMÁTICA

Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática

Facultad de Ciencias Puras y Naturales – Universidad Mayor de San Andrés

(5to y 6to de Primaria)

Pregunta y Solución de la Prueba Fase Final

Categoría: ϵ

Problema 1.

Puntaje: ☐

Se tienen varias canastas dispuestas formando un círculo. Se desea colocar naranjas en las canastas de modo que la diferencia entre el número de naranjas en cualesquiera dos canastas adyacentes sea exactamente 1.

(a) Si hay 10 canastas, ¿es posible realizar tal distribución?

(b) ¿Qué ocurre si hay 3 canastas?

(c) ¿Qué ocurre si hay 9 canastas?

Justifique su respuestas.

Solución.

(a) Sí, es posible. Por ejemplo, se pueden alternar canastas con una naranja y canastas con dos naranjas.

(b) No es posible.

(c) No es posible. En efecto, si la diferencia entre canastas adyacentes es 1, entonces el número de naranjas en canastas consecutivas tiene paridades alternadas: una canasta contiene un número par de naranjas y la siguiente un número impar, y así sucesivamente.

Supongamos que la primera canasta contiene un número par de naranjas. Entonces la segunda contiene un número impar, la tercera un número par, y así sucesivamente. Como hay 9 canastas, la novena tendrá la misma paridad que la primera, es decir, también contendrá un número par de naranjas. Sin embargo, la novena y la primera canasta son adyacentes, lo cual contradice que sus cantidades deban diferir en 1.

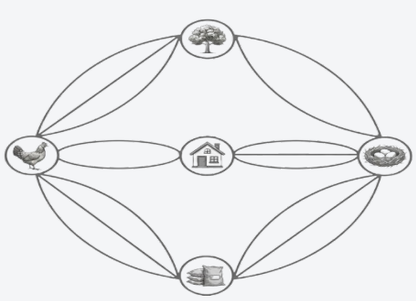
Un razonamiento análogo conduce a la misma contradicción si la primera canasta contiene un número impar de naranjas. Por lo tanto, tal distribución es imposible.

El mismo argumento de paridad se aplica al caso del inciso (b).

Problema 2.

Puntaje: ☐

En una granja, se han establecido caminos como se ve en la figura. Un cuidador debe llevar la gallina hasta su nido, pasando por exactamente uno de los tres lugares intermedios: el árbol, la casa o las bolsas de alimento.



¿De cuántas maneras diferentes puede realizar el recorrido?

Solución. Para determinar el número total de rutas posibles, analizamos el recorrido de la gallina hacia el nido dividiéndolo en casos disjuntos, según el único lugar intermedio, por el que obligatoriamente debe pasar el recorrido (el árbol, la casa o las bolsas de alimento):

Caso 1: Pasando únicamente por el árbol (estación superior).

- Existen 3 caminos distintos de la gallina al árbol.
- Existen 2 caminos distintos del árbol al nido.

Aplicando el principio de multiplicación, el total de maneras por esta ruta es: $3 \times 2 = 6$.

Caso 2: Pasando únicamente por la casa (estación central).

- Existen 2 caminos distintos de la gallina a la casa.
- Existen 3 caminos distintos de la casa al nido.

Aplicando el principio de multiplicación, el total de maneras por esta ruta es: $2 \times 3 = 6$.

Caso 3: Pasando únicamente por las bolsas de alimento (estación inferior).

- Existen 3 caminos distintos de la gallina a las bolsas de alimento.
- Existen 3 caminos distintos de las bolsas al nido.

Aplicando el principio de multiplicación, el total de maneras por esta ruta es: $3 \times 3 = 9$.
Como los tres casos cubren todas las opciones posibles de manera excluyente (disjunta), aplicamos el **principio de adición** sumando los resultados de cada caso:

$$\text{Total de maneras} = \underbrace{3 \times 2}_{\text{Árbol}} + \underbrace{2 \times 3}_{\text{Casa}} + \underbrace{3 \times 3}_{\text{Bolsas}} = 6 + 6 + 9 = 21.$$

Por lo tanto, el recorrido se puede realizar de **21** maneras diferentes.

Problema 3.

Puntaje: ☐

Inicialmente, en la pizarra está escrito el número 20. En cada movimiento se permite realizar exactamente una de las siguientes operaciones:

- duplicar el número escrito en la pizarra, o
- borrar su última cifra (es decir, eliminar el dígito de las unidades).

A partir del número inicial, ¿es posible obtener el número 25 después de una cantidad finita de movimientos? Justifique su respuesta.

Solución. Mostramos que es posible obtener el número 25 a partir del número inicial 20 mediante una sucesión finita de movimientos permitidos. En cada movimiento se puede realizar exactamente una de las siguientes operaciones: duplicar el número escrito en la pizarra o borrar su última cifra.

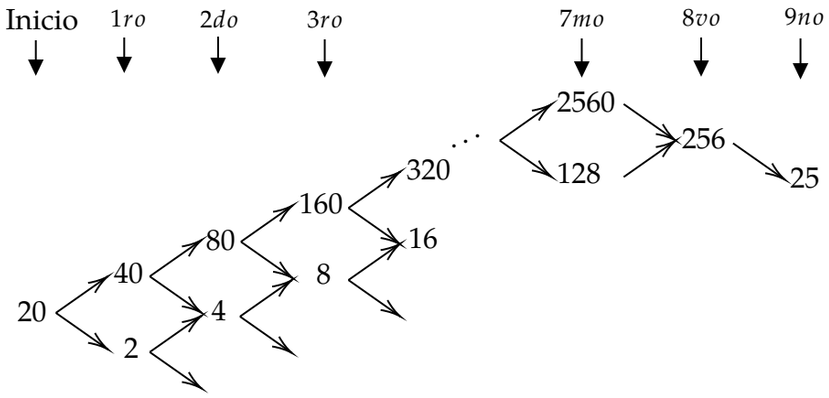
Partiendo del número inicial 20, en el primer movimiento se puede obtener 40 (al duplicar) o 2 (al borrar la última cifra). A partir de estos resultados, se continúa aplicando las mismas operaciones de forma iterada. En particular, si en cada paso se duplica el número obtenido y, en ciertos momentos estratégicos, se borra la última cifra, se genera una sucesión de valores como la siguiente:

$$20 \to 40 \to 80 \to 160 \to 320 \to \cdots$$

intercalada con las operaciones de eliminación de la última cifra:

$$40 \to 4, \quad 80 \to 8, \quad 160 \to 16, \quad 256 \to 25.$$

Siguiendo este procedimiento, tal como se ilustra en el diagrama, se observa que en el noveno movimiento se alcanza exactamente el número 25. Por lo tanto, se concluye que *sí es posible* obtener el número 25 a partir de 20 mediante una cantidad finita de movimientos permitidos.

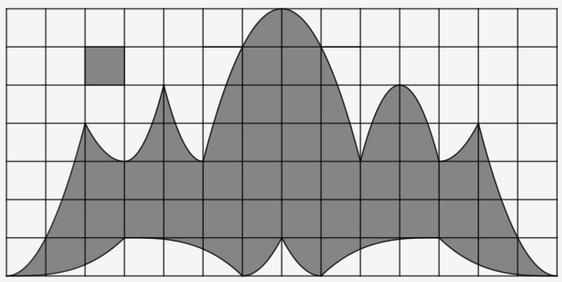


Problema 4.

Puntaje: ☐

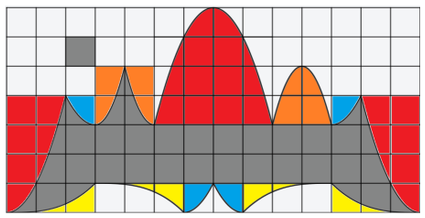
En la figura, se muestra una región sombreada limitada por arcos que están inscritos en rectángulos de distintas dimensiones, donde hay:

- Cuatro arcos en bloques de 1×3.
- Cuatro arcos en bloques de 4×2.
- Cuatro arcos en bloques de 2×1.
- Cuatro arcos en bloques de 1×1.

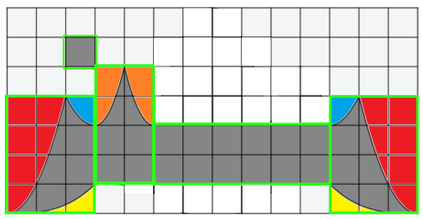


Sabiendo que todos los arcos de un mismo grupo tienen la misma forma y tamaño. La cuadrícula de fondo está compuesta por casillas cuadradas, cada una con un área de 1 u^2. Determine el área de toda la región sombreada (gris).

Solución. Observamos que la figura está compuesta por arcos delimitados en bloques del mismo tamaño. Podemos trasladar los arcos sombreados hacia las regiones no sombreadas correspondientes como se muestra en la siguiente figura.



Al trasladar y reacomodar todas las piezas curvilíneas, la región sombreada se transforma en un conjunto de rectángulos exactos como se ve, a continuación.



Sumando todas las áreas $4 \times 3 + 4 \times 2 + 2 \times 6 + 4 \times 3 + 1 \times 1 = 12 + 8 + 12 + 12 + 1 = 45$ u^2.

Problema 5.

Puntaje: ☐

Un policía debe despejar una zona de bloqueo que inicialmente cuenta con 100 bloqueadores. Cada día ocurren los siguientes eventos: cada policía convence a 1 bloqueador de retirarse y, al final del día, tanto el número de policías como el de bloqueadores se duplica. Determine si el bloqueo se despejará por completo y en cuánto tiempo ocurrirá.

Solución. Para resolver el problema, podemos analizar cómo evoluciona la situación día a día:

Sin la intervención de refuerzos ni divisiones, la dinámica sería directa: tras 1 día, el único policía retira a 1 bloqueador, dejando $100 - 1 = 99$ bloqueadores. Como cada día el número de bloqueadores disminuiría en 1, el bloqueo se despejaría en 100 días.

Sin embargo, al considerar las reglas completas del problema, el proceso incluye la duplicación y expansión de las fuerzas. Analicemos el primer día: durante la jornada, el único policía presente convence a 1 bloqueador de retirarse, dejando temporalmente 1 policía y 99 bloqueadores. Al finalizar el día, ambas cantidades se duplican, resultando en 2 policías y 198 bloqueadores. Esta nueva configuración equivale exactamente a tener 2 zonas de bloqueo idénticas, cada una con 1 policía y 99 bloqueadores.

Siguiendo esta misma dinámica, al final del segundo día, cada zona de bloqueo vuelve a duplicarse y dividirse, generando 4 zonas independientes con 1 policía y 98 bloqueadores cada una. En general, al observar el sistema desde la perspectiva de cada punto individual, el número de policías se mantiene constante en 1, mientras que la cantidad de bloqueadores disminuye de manera uniforme en 1 unidad por día.

Dado que la dinámica en cada una de estas subzonas es completamente equivalente al caso base sin refuerzos, el proceso de reducción toma exactamente el mismo tiempo. Por lo tanto, todas las zonas de bloqueo se despejarán simultáneamente después de 100 días.